

边坡稳定分析的塑性力学上限解

陈祖煜 (水利水电科学研究院)

提要 本文介绍一种建立在塑性力学上限定理基础上的边坡稳定分析实用的方法。把滑动土体离散成具有倾斜侧面的条块,根据外力功和内能耗散相等求解安全系数,应用最优化方法求解最小安全系数、临界滑裂面和条块侧面。对一系列具有闭合解的经典问题,应用这一方法进行验算,不仅得到了接近1的最小安全系数,而且得到了与理论解一致的临界滑裂面,证明这是一个具有坚实的理论基础的严格的方法。由于该方法是建立在数值解基础上的,因此适用于具有复杂边界和剖面的岩土工程的实际问题,克服了理论解的局限性。

一、前言

极限平衡方法始终是堤坝,天然边坡和其它岩土结构中主要的稳定分析方法。这个方法虽然在工程中获得了广泛的应用,但并没有严格的理论基础。因此,许多学者致力于严格地遵循塑性力学极限分析方法来找到岩土稳定问题解答。由 W. F. Chen 为代表的一系列研究 (Chen, 1978; Karal, 1977) 反映了这方面的努力。但是,由于这些工作始终采用纯解析法 (例如变分法) 来求解最小上限,其适用范围仅限于少数几个示意性的具有简单边界和材料特性的题目。岩土工程的大部分问题都具有复杂几何和材料条件,必须开发数值分析的方法,方可使大部分实际问题方便地获得解答。

近期,笔者和澳大利亚 I. Donald 教授合作,在二维领域应用塑性力学上限定理进行边坡稳定的理论研究。这个方法从变形协调出发,对于一个设定的滑裂面和斜分条模式,建立协调的速度场,根据外力功和内能耗散相平衡的原理确定相应的安全系数或加载系数,然后应用最优化方法,确定相应最小的安全系数的那个临界滑裂面和斜分条模式 (以下简称能量法)。本文简述这方面的成果。

二、极限分析法的理论基础和计算步骤

应用塑性力学上限定理的原理进行边坡稳定分析,已有许多作者做过讨论 (Chen, 1975; Karal, 1977)。Giam 和 Donald (1991) 提出的、经 Donald 和陈祖煜 (1994) 改进的边坡稳定塑性力学上限解方法包括以下步骤:

1. 建立多块体破坏模式

对某一边坡的塑性区,我们将其用一系列倾斜的线分成若干楔块。图 1 示一三个块体的系统。每一楔块都视为刚体,其变形速率为 V ,如果材料遵守摩尔-库伦破坏准则和相关联的流动法则,则可确认沿滑面的速度 V 与滑面夹角为 φ ,与右边相邻块体的相对速度 V_j ,与该两块体的交界面的夹角为 φ_j 。内能耗散发生于该楔块的底面和楔块间的界面,在刚体内

为零。

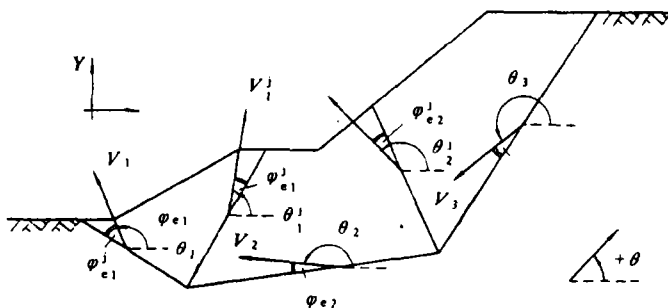


图1 能量法计算简图，三块体破坏结构

2. 计算内能耗散

单位面积内能耗散的公式如下 (Chen, 1975):

$$dD = (c \cos \varphi - u \sin \varphi) V \quad (1)$$

其中 c 粘聚力, u 为孔压。

3. 上限定理的基本命题

在边坡稳定分析领域, 对上限定理的描述可以用下面的命题表达:

在塑性区 Ω^* , 给出一个机动可能的应变场 ϵ_i^* , 并在滑裂面 Γ^* 上给出一个相应的速度场 V^* , 塑性区重量为 W , 那么, 按照下式计算获得的外荷载 T^* 将比一个包含有真实的塑性区 Ω 和真实的滑裂面 Γ 的临界荷载 T 大或与其相等。

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Delta D_k^* + \sum_{k=1}^n \Delta D_k^* = W V^* + T^* V^* \quad (2)$$

上式左边的第一和第二项分别为沿条间界面和滑裂面的内能耗散, 均可由式 (1) 求得。

因此, 在诸多的协调的位移场中给出最小的 T^* 的那个一定最接近真实的临界荷载。求解结构稳定问题的步骤是这样的。对设定的多块体模式相应的协调的位移场, 通过式 (2) 求得其相应的荷载 T^* 。应用最优化方法, 寻找一个自变量空间 (多块体模式及其协调的位移场), 它使目标函数 T^* 最小。这个解将接近或稍大于真实解。在实际操作时, 我们通常引入以下安全系数 F 的定义, 并将 F 作为目标函数。

$$c_e = \frac{c}{F} \quad (3)$$

$$\tan \varphi_e = \frac{\tan \varphi}{F} \quad (4)$$

$c_e, \tan \varphi_e$ 分别为粘聚力和摩擦系数。这样, 通过减少强度指标而不是加载使边坡进入极限状态。式 (2) 左侧隐含的 c, φ , 分别用 c_e, φ_e 代替, 右侧 T^* 不再存在。

4. 计算协调的速度场

位移协调条件要求相邻条块的移动不至于导致它们重迭或分离。也就是说, 速度多边形要闭合 (图 2)。根据这个条件, 右侧条块的速度 V_r 和左、右条块间的界面的相对速度 V_i 可以通过左侧条块的速度 V_l 确定。

$$V_r = V_l \frac{\sin(\theta_l - \theta_j)}{\sin(\theta_r - \theta_j)} \quad (5)$$

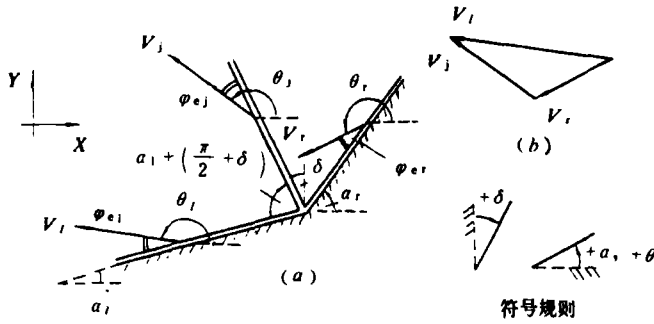


图2 相邻块体的位移协调
(a) 块体的速度; (b) 速度多边形

$$V_j = V_i \frac{\sin(\theta_r - \theta_i)}{\sin(\theta_r - \theta_j)} \quad (6)$$

其中 θ_r, θ_i 为 V_r, V_i 相对 X 轴的夹角 (参见图2)。

$$\theta_j = \frac{\pi}{2} - \delta + \varphi_j \quad (7)$$

δ 为侧面与 y 轴夹角。借助式 (5), (6), 图1中 V_2 和 V_l 可表达成 V_1 的线性函数。依次类推, 可以获得任一块体的 V 的 V^j 。这一步骤也可以通过积分实现。当条块宽度 Δx 很小时, 式 (5) 变为微分方程, 积分后获得 (参见图3)。

$$V = E(x)V_0 \quad (8)$$

其中,

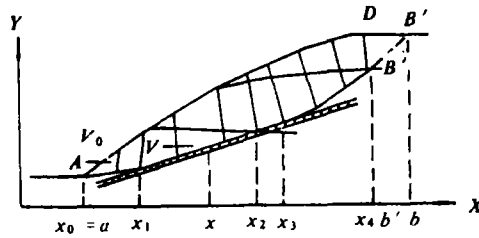


图3 计算协调的位移场

$$E(x) = \kappa \exp\left[-\int_{x_0}^x \cot(\alpha - \varphi_i - \theta_j) \frac{d\alpha}{d\xi} d\xi\right] \quad (9)$$

$$\kappa = \prod_{i=1}^k \frac{\sin(\alpha_i^l - \varphi_i^l - \theta_j)}{\sin(\alpha_j^r - \varphi_i^r - \theta_i^r)} \quad (10)$$

V_0 为左端点的速度。滑裂面上有 κ 个不连续点, 在该点上 α 或 φ 发生突变。上标 l 和 r 代表连续点左和右的物理量。计算从第一个界面开始, 到分隔第 k 和第 $k+1$ 个块体的第 k 个界面终止。

式 (9) 说明, 滑裂面上处于第 k 个 φ 或 α 不连续点右侧的任一点的速度可以直接通过在 (x_0, x_k) 区间的积分求得, 表达成左端点 ($x=x_0$ 处) 的速度 V_0 的函数。 α 和 φ 的突变影响在系数 κ 中得到了考虑。

5. 计算安全系数

对某一多块体破坏模式, 将通过式 (8) 获得的速度场代入式 (2), 最终获得计算安全

论是最小安全系数，还是临界滑裂面和临界条间界面均十分接近。

自本法开发后，相应程序已在小浪底、思林、三峡等水电工程中获得应用。

三、结 语

本文提出的新方法包含的主要改进是：

1. 把滑动土体离散为若干土条，保留了条分法简便实用的特点，但土条侧面是倾斜的，更具有一般性。

2. 应用最优化方法求解极值问题，克服了纯解析法的局限性。

上述改进使塑性力学上限解法在边坡领域成为一个实用的方法。

本法的理论和实用意义表现在以下几方面：

(1) 对一系列具有闭合解的经典问题，应用这一方法进行验算，不仅得到了接近 1 的最小安全系数，而且得到了与理论解一致的临界滑裂面，证明这是一个具有坚实的理论基础的严格的方法。由于该方法是建立在数值解基础上的，因此适用于具有复杂边界和剖面的岩土工程的实际问题，克服了理论解的局限性。

(2) 应用虚功原理和边坡稳定极限平衡微分方程的闭合解，证明本研究采用的能量法和 Sarma 斜分条的静力法是一致的。外力功和内能耗散相平衡的方程事实上就是 Sarma 的静力平衡方程的解。并最终证明了潘家铮的最大最小原理，为研究成果扩展到三维，地震动力分析和分析锚索的作用等领域创造了条件。这方面的内容详见文献 [7, 8]。

本研究项目得到国家自然科学基金、澳大利亚研究院 (Australia Research council) 资助。

参 考 文 献

- [1] Chen, W. F., Simit analysis and soil plasticity. Elsevier Scientific Publishing Co. New York. 1975.
- [2] Chen. Z. and shao, C., Evaluation of minimum factor of safety in slope stability analysis. Canadian Geotechnical Journal. 25; 735-748. 1988.
- [3] Giam, p. and Donald, l., Upper bound solutions to soil stability problems via general wedge method. Proc. 7th CMAG Cairns. 475-480. 1991
- [4] Karal K., Application of energy method. J. Engng Mech. Am. Soc. Civ. Engrs 103, GT5, 381-397. 1977a
- [5] Karal K., Energy method for soil stability analysis. J. Engng Mech. Am. soc. Civ. Engrs, 103 GT5, 431-445. 1977b.
- [6] Sokolovski, V. V. 1954, Statics of soil media. Translated by Jones, D. H. and Schofield, A. N. 1960, Butterworths, London.
- [7] 1. Donald 和陈祖煜, 边坡稳定分析的塑性力学上限解, 第一部分: 基本原理和方法, 水利水电科学研究院, 1994 年 2 月。
- [8] 陈祖煜和 1. Donald, 边坡稳定分析的塑性力学上限解, 第二部分: 论能量法和静力法的等效性, 水利水电科学研究院, 1994 年 2 月。