

# 用 DFP 法计算边坡稳定最小安全系数时 导数的计算方法

水利水电科学研究院

陈祖煜

## 提 要

本文讨论用 DFP 法计算边坡稳定最小安全系数时导数的计算问题。提出使用差分法时步长的合理选定原则,同时提出一个不直接计算安全系数的半解析方法。

## 一、前 言

近年来,最优化原理和方法被用于搜索边坡稳定最小安全系数。回顾已经发表的有关著作,几乎所有的研究成果都使用直接搜索法,均没有涉及在最优化方法中占有重要地位的牛顿法体系。作者在探讨牛顿法中具有代表意义的 DFP 法的可行性时发现,必须针对边坡课题的特殊性解决:(1)多极值问题;(2)量纲问题和(3)导数计算精度问题,方可使 DFP 法有效地应用于边坡稳定分析中。在文献[7]和[2]中,作者分别讨论了前两个问题,本文拟介绍解决第(3)个问题所作的一些工作。

牛顿法和直接搜索法的一个基本区别是前者要通过计算目标函数  $F$  对自变量  $z_i$  的导数,用解析方法找到极值点,也就是找到各项导数均为零的自变量向量;而后者仅是按一定模式进行比较,筛选,找到极值点,因而不需要计算导数。和许多优化问题一样,在边坡问题中,这些导数值无法通过一个明确公式计算确定。一般采用差分法近似计算。但由于安全系数  $F$  在稳定分析中是通过迭代计算求得的,其本身精度不高,因此,在差分计算时,其步长不能太小,这就决定了  $\partial F / \partial z_i$  的精度不可能很高;另一方面,当计算趋近极值点时,  $\partial F / \partial z_i$  本身的价值接近于零,这就使计算所得的  $\partial F / \partial z_i$  的相对误差急剧增大,导致计算不正常结束。

本文讨论在使用差分法计算  $\partial F / \partial z_i$  时步长的合理选定问题;同时提出一个不直接计算安全系数  $F$  的增量确定  $\partial F / \partial z_i$  的方法。

为了便于理解,有必要简述确定边坡稳定分析最小安全系数的步骤:

1.任意形状滑裂面的模拟。任意形状滑裂面由联结  $m$  个控制点的直线或光滑曲线组成(图 1)。这  $m$  个点中有  $n$  个点从某一初始滑裂面  $Z^\circ$  出发,各沿其设定方向  $\alpha_i$  移动,分别在其移动方面获得一增量  $\Delta z_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ),到达  $Z^\circ + \Delta Z$ , 其安全系数为

$F$ ，其余  $m-n$  个点假设在优化过程中固定不动。稳定分析的目的是寻找  $F$  的最小值  $F_m$  和相应临界滑面的位置，即  $Z^\circ + \Delta Z^m$ 。

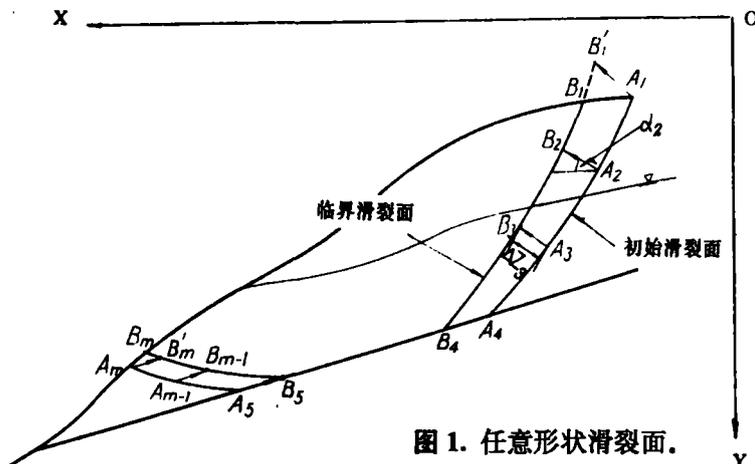


图 1. 任意形状滑裂面。

2. 确定一个设定的滑裂面的安全系数。对滑动土体建立力和力矩平衡方程式:

$$G_n = G(F, \lambda) = \int_a^b p(x)s(x)dx = 0 \quad (1)$$

$$M_n = M(F, \lambda) = \int_a^b p(x)s(x)t(x)dx = 0 \quad (2)$$

式(1)至(2)中的符号意义见文献[4]。在式(1)(2)中含有两个未知数，即安全系数  $F$  和一待定常数  $\lambda$ 。可采用牛顿-勒普生法迭代求解。作者和 Morgenstern 在文献[4]中推出在迭代时必须知道的  $\partial G_n / \partial F$ ,  $\partial G_n / \partial \lambda$ ,  $\partial M_n / \partial F$ ,  $\partial M / \partial \lambda$  的计算公式，在本文第四节提出的计算方法中，这些计算公式将占有重要地位。

3. 最优化方法。如前所述，安全系数  $F$  为  $n$  个控制点在其移动方向的位移  $\Delta z_i$  的函数 ( $i=1, 2, \dots, n$ ),

$$F = F(\Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_n) \quad (3)$$

使用 DFP 法确定使  $F$  获得极值  $F_m$  的向量  $(\Delta z_1^m, \Delta z_2^m, \dots, \Delta z_n^m)^T$ ，此时  $\partial F / \partial z_i$  均为零，其具体步骤详见文献[1], [3]。本文要深入讨论的是如何准确地确定  $\partial F / \partial z_i$  的问题。

## 二、用差分法确定导数的步骤

我们首先简单回顾 Stewart III 讨论的有关差分计算中步长确定的原则(文献[6])。

对于某一函数  $\varphi = \varphi(z)$ ，用向前差分计算  $d\varphi / dz$  在  $z=0$  处值的公式是:

$$\frac{d\varphi}{dz} \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta z} = \frac{\varphi(\delta) - \varphi(0)}{\delta} \quad (4)$$

中心差分的计算公式是:

$$\frac{d\varphi}{dz} \approx \frac{\varphi(\delta) - \varphi(-\delta)}{2\delta} \quad (5)$$

其中  $\delta = \Delta z$  为选用的步长, 使用式(4)计算  $d\varphi/dz$ , 其误差来自两个方面:

1. 截断误差.  $\Delta\varphi$  的准确值是

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi(\delta) - \varphi(0) \\ &= \gamma \cdot \delta + \frac{1}{2}\rho\delta^2 + \dots\end{aligned}\quad (6)$$

其中  $\gamma, \rho$  分别为  $\partial\varphi/\partial z, \partial^2\varphi/\partial z^2$  在  $z=0$  处的值. 因此, 用式(4)计算  $\gamma$ , 实际上忽略了  $1/2\rho\delta^2$ , 由此引起的相对截断误差  $\eta_t$  为

$$\eta_t = \frac{1}{2} \left| \frac{\rho\delta^2}{\gamma} \right| \quad (7)$$

2. 舍入误差. 由于任何一个数值在计算机中都是一个有限字长的数字近似代表的, 如果  $\delta$  选得太小, 计算机将无法识别  $\varphi(\delta)$  和  $\varphi(0)$  之间的区别. 由于  $\varphi$  的有限精度造成的按式(4)计算的  $\gamma$  值的误差称舍入误差, 相对舍入误差  $\eta_c$  按下式估算:

$$\eta_c \leq 2 \left| \frac{\varphi(0)}{\Delta\varphi} \right| \eta \quad (8)$$

其中  $\eta$  为  $\varphi(0)$  的相对误差. 确定原则是: (1) 如果  $\varphi(z)$  的数值是通过某一公式对自变量  $z$  进行若干算术运算得到的, 那么  $\eta$  值首先取决于  $z$  本身的相对误差. 在计算机中,  $z$  是被一个在区间  $[z(1-\varepsilon_m), z(1+\varepsilon_m)]$  的某个数值近似代表的. 其中  $\varepsilon_m$  称为机器误差, 它的大小取决于计算机的种类和精度级别(单、双精度), 可以按图 2 所示框图编一个简单的程序来测试  $\varepsilon_m$  的数值(参见文献 [6]). 对于 IBM-PC-XT 机, 可以知道  $\varepsilon_m = 5.96 \times 10^{-8}$ .  $\eta$  值还取决于在进行  $\varphi(z)$  的算术运算时积累的误差. 它使  $\varphi(z)$  的相对误差  $\eta$  比

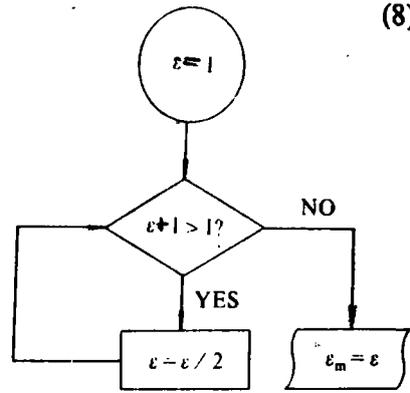


图 2. 测定计算机精度  $\varepsilon_m$  的程序框图.

$z$  的相对误差  $\varepsilon_m$  大几倍或几十倍; (2) 如果  $\varphi(z)$  的数值不能用显式计算, 需要通过迭代求得, 则  $\eta$  取决于迭代精度. 例如, 稳定分析的安全系数  $F$ , 它是通过迭代求解式(1),(2)获得的, 在单精度运算时, 迭代收敛标准是  $10^{-5}$ , 由于安全系数的数值在 1 左右, 故可大致认定  $F$  的相对误差  $\eta < 10^{-4}$ .

Steward III 提出的确定步长  $\delta$  的步骤如下:

1. 要求式(7)和式(8)右端相等, 即要求舍入误差和截断误差平衡, 据此计算  $\delta$  值.
2. 用式(4)计算  $\gamma$  值, 并按式(7)估算  $\eta_t$ . 如果  $\eta_t$  超过了允许值  $\varepsilon$  (例如  $\varepsilon = 5\%$ ), 则要用中心差分式(5)计算  $\gamma$ .
3. 如果使用中心差分, 则  $\delta$  通过解下式求得:

$$\frac{1}{2} |\rho| \varepsilon \delta^2 + \varepsilon |\gamma| \delta - 2\eta |\varphi(0)| = 0 \quad (9)$$

式(9)是令式(8)右端等于  $\varepsilon$  获得的, 其中  $\Delta\varphi$  按式(6)确定.

在稳定分析中, 由于  $F$  的精度低, 故总是用中心差分, 因此, 我们不进行 Steward 提出的第一步. 在用式(9)计算  $\delta$  时, 取  $\varepsilon = 5\%, \eta = 10^{-4}, \rho, \gamma$  的值近似采用在 DFP 法计算时上一次迭代已经算得的值. 假定  $\varphi$  在  $(-\delta, \delta)$  区间呈抛物线分布, 这样,

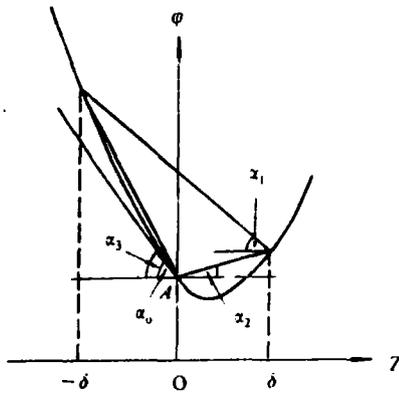


图3.  $\delta$  过大时, 向前差分确定导数可能产生的误差示意.  $\operatorname{tg}\alpha_0 = A$  点  $d\varphi/dz$  的值;  $\operatorname{tg}\alpha_1, \operatorname{tg}\alpha_2, \operatorname{tg}\alpha_3 =$  中心差分, 向前差分, 向后差分  $d\varphi/dz$  的值.

$\gamma$  仍按式(4)计算,  $\rho$  的计算公式为

$$\rho = \frac{\varphi(\delta) + \varphi(-\delta) - 2\varphi(0)}{2\delta^2} \quad (10)$$

采用中心差分的另一个理由是, 由于  $F$  的精度低,  $\delta$  的数值相对较大, 当快要接近极值时, 向前差分可能得到与真实值符号截然相反的导数值(见图3), 中心差分可在很大程度上避开这一危险.

### 三、半解析法计算导数的步骤

设想由于  $z_i$  的一个增量  $\Delta z_i$  使式(1),(2)中的  $F$  和  $\lambda$  各有一增量  $\Delta F$  和  $\Delta\lambda$ , 则

$$G_n = G_n(F + \Delta F, \lambda + \Delta\lambda, z_i + \Delta z_i) = 0 \quad (11)$$

$$M_n = M_n(F + \Delta F, \lambda + \Delta\lambda, z_i + \Delta z_i) = 0 \quad (12)$$

全微分式(11),(12)可得

$$\frac{\partial G_n}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial z_i} + \frac{\partial G_n}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z_i} = -\frac{\partial G_n}{\partial z_i} \quad (13)$$

$$\frac{\partial M_n}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial z_i} + \frac{\partial M_n}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z_i} = -\frac{\partial M_n}{\partial z_i} \quad (14)$$

由此可得

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = \frac{\frac{\partial G_n}{\partial \lambda} \frac{\partial M_n}{\partial z_i} - \frac{\partial M_n}{\partial \lambda} \frac{\partial G_n}{\partial z_i}}{\frac{\partial G_n}{\partial F} \frac{\partial M_n}{\partial \lambda} - \frac{\partial M_n}{\partial F} \frac{\partial G_n}{\partial \lambda}} \quad (15)$$

式(15)给出了一个不直接计算  $F$  值确定  $\partial F/\partial z_i$  的公式. 式(15)右边的  $\partial M_n/\partial \lambda$ ,  $\partial M_n/\partial F$ ,  $\partial G_n/\partial \lambda$ ,  $\partial G_n/\partial F$ , 都是在计算一个滑裂面安全系数时已经算得的, 而且是通过精确的计算公式确定的.  $G_n/\partial z_i$ ,  $\partial M_n/\partial z_i$  仍然需要通过差分求得, 但由于计算  $G_n$  和  $M_n$  的公式(1)和(2)也是精确的表达式, 故可达到较高的精度.

在用中心差分计算  $\partial G_n/\partial z_i$ ,  $\partial M_n/\partial z_i$  时,  $\delta$  的选用原则是: 要求按式(8)确定的舍入误差相对值  $\eta_c$  小于允许值  $\varepsilon$ .  $G_n, M_n$  是通过式积分算得的, 在两个相邻的控制点  $i, i+1$  之间, 被分成了  $N_{i+1}$  个土条, 因此要求在进行差分运算时, 每个土条的高度  $h$  的相对误差都小于规定值. 当第  $i$  个控制点在其移动方向  $z_i$  有一增量  $\delta$  时, 其  $(i, i+1), (i-1, i)$  两段的每个土条的高度  $h$  都将获得一个增量  $\Delta h$ , 其中  $h$  获得增量最小的那个土条相应值为  $\delta/N_m$ . 这里,  $N_m = \max(N_i, N_{i+1})$ ,  $N_i, N_{i+1}$  分别为

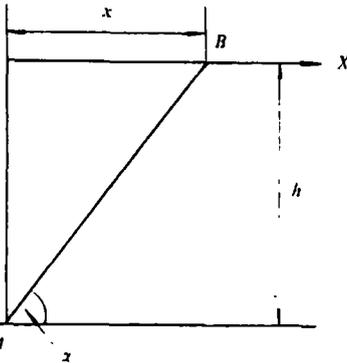
$(i-1, i)$  和  $(i, i+1)$  段的土条数, 分别以  $\eta_c = \varepsilon$ ,  $\Delta\varphi = \delta / N_m$  ( $z_m$  为  $x_i, y_i$  中的大值) 代入式(8), 可得一确定  $\delta$  的近似公式

$$\delta \geq 2 \frac{z_m N_m}{\varepsilon} \eta \quad (16)$$

$\eta$  为  $z_m$  的相对误差, 可取  $\eta = \varepsilon_m, \varepsilon$  选用(5~10)%.

#### 四、例题和验证

本节列举两个例题以验证本文所提的计算导数的方法的可行性, 特别是验证第三节用来计算  $\partial F / \partial z_i$  的公式(15)的正确性.



例1. 图4示一垂直均匀边坡, 假设滑裂面为通过坡趾A与水平线倾角为 $\alpha$ 的直线, 那么沿该滑裂面滑动的安全系数 $F$ 仅为B的 $X$ 坐标值的函数, 并且安全系数 $F$ 和 $dF/dx$ 均可通过理论推导获得:

$$F = \text{tg}\varphi \text{ctg}\alpha + \frac{4c}{\gamma h \sin 2\alpha} \quad (17)$$

$$\frac{dF}{dx} = (\text{tg}\varphi \text{ctg}\alpha + 4\text{ctg}2\alpha \frac{c}{\gamma h}) / x \quad (18)$$

当 $F$ 获得极值时,

$$\text{tg}\alpha = \sqrt{1 + 2/s} \quad (19)$$

图4. 例1, 垂直均匀坡. 计算所得导数与理论值对比.

其中

$$s = \frac{4c}{\gamma h \text{tg}\varphi} \quad (20)$$

对图4示边坡, 取  $h = 25\text{m}$ ,  $\varphi' = 35^\circ$ ,  $c = 49\text{kPa}$ ,  $\gamma = 1.8\text{g/cm}^3$ , 分别采用差分法和半解析法计算  $dF/dx$ , 并与理论值对照, 列于表1. 此例当  $x = 12.283$  时获得安全系数极小值  $F_m = 0.9056$ . 表1所列计算结果表明, 半解析法和差分法均可以获得和理论值完全一致的最小安全系数和临界滑裂面.

例2. 如图5所示例, 滑裂面由  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$  用直线连成. 表2比较在第2和第11个迭代步, 安全系数对此五个自由度的导数  $\partial F / \partial z_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), 分别用中心差分法和半解析法计算所得值, 可见大部分情况下, 两种方法获得结果基本是一致的, 但两种方法采用的步长  $\delta$  的大小有明显的差别, 由于半解析法使用的  $\delta$  远小于差分法, 有理由认为其获得的  $\partial F / \partial z_i$  更准确一些. 半解析法和差分法获得的  $F_m$  分别为 1.865 和 1.870, 耗费机时分别为 48'41" 和 52'41". 可见在这一例中, 半解析法在精度和效率方面略优于差分法, 但差别不大.

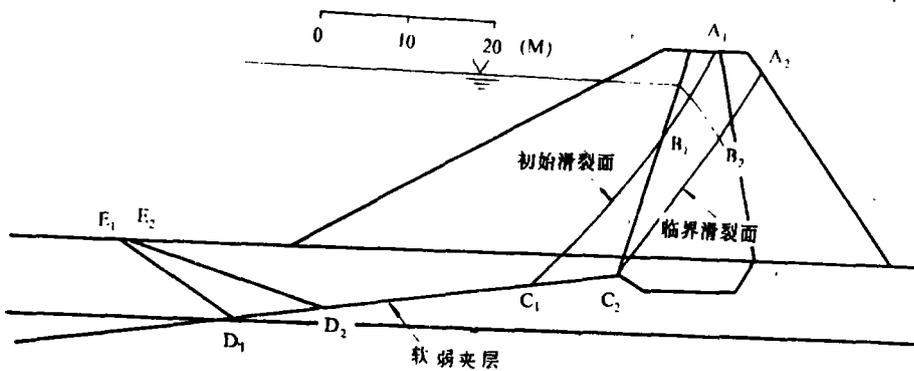


图 5.例 2. 具有软弱夹层的土石坝。

表 1 例 1F 和  $\frac{dF}{dX}$  理论值和近似法结果对照

		x	25	8	5	12.283
F	理论值(式 17)		1.1446	0.9896	1.2956	0.9056
	程序计算		1.1447	0.9896	1.2956	0.9055
$\frac{dF}{dX}$ 数值	理论值(式 18)		0.02801	-0.0499	-0.1854	$\approx 0$
	半解 析法	$\delta$	0.019	0.011	0.011	0.011
		$\frac{dF}{dX}$	0.02801	-0.0499	-0.1853	$0.713 \times 10^{-4}$
	差分 法	$\delta$	0.035	0.078	0.014	0.378
$\frac{dF}{dX}$		0.02806	-0.0499	-0.1854	$0.367 \times 10^{-4}$	

表2 例2第2, 11次迭代步 $\frac{\partial F}{\partial z_1}$ 值半解析解和差分解比较

自由度	迭代步 方法	2		11	
		步长 $\delta(M)$	$\frac{dF}{dz_1} (10^{-2} / M)$	步长 $\delta(M)$	$\frac{dF}{dz_1} (10^{-2} / M)$
1	半解析法	0.0068	1.009	0.0056	0.071
	差分法	0.378	1.080	11.1	0.079
2	半解析法	0.0068	0.349	0.0056	0.17
	差分法	0.710	0.357	0.87	0.032
3	半解析法	0.018	0.483	0.018	0.73
	差分法	0.478	0.468	0.38	0.085
4	半解析法	0.018	0.717	0.018	0.31
	差分法	0.111	0.431	0.265	0.29
5	半解析法	0.0082	-0.291	0.0077	-0.146
	差分法	0.271	-0.292	0.843	-0.147

### 参考文献

1.Chen,Z and Shao,C. 1988, Evaluation of minimum factor of safety in slope stability analysis, Canadian Geotechnical Journal, Vol 25, No.4, pp.735-748.

2.陈祖煜、邵长明, "用最优化方法搜索边坡最小安全系数的一个改进", 岩石力学在工程中的应用, 第二次全国岩石力学与工程学术会议论文集, 知识出版社, 1989年, pp.71-75.

3.陈祖煜、邵长明, "最优化方法在确定边坡最小安全系数方面的应用", 《岩土工程学报》, 第10卷, 第4期, 1988年.

4.Chen, Z.and Morgenstern, N.R(1983), Extensions to the generalized method of slices for stability analysis, Canadian Geotechnical Journal, Vol.20, No.1, pp.104-109.

5.Dennis, JR., J. and Schanabel, R. B. Numerical methods for unconstrained optimization and Nonlinear equations, Prentice-Hall, Inc., 1983, p.13.

6. Stewart, G. W. III, 1967. A modification of Davidon's minimization method to accept difference approximations of derivatives. Journal of the Association for Computing Machinery: 1,72-83.

7.陈祖煜, 随机搜索在确定边坡稳定安全系数整体极值中的应用, 水利水电科学研究院, 岩土(90), 1990年.

本项目接受国家自然科学基金资助