用优化方法搜索边坡最小安全系数的一个改进

陈祖煜　邵长明

（水利水电科学研究院　北京　100044）

提　　要

DFP法是公认的极为有效的优化方法。但在使用DFP法计算边坡最小安全系数时，结果却不够理想，出现收敛困难的问题。本文作者经过分析计算发现，DFP法直接用于边坡最小安全系数计算还存在一些问题，必须加以改进。本文对DFP法作了一定改进，使其适用于边坡最小安全系数计算。在例题计算中，经改进的DFP法的计算结果令人满意。

用极限平衡原理确定边坡稳定的安全系数通常要分两步进行。

1．对某一可能的滑裂面，确定其稳定安全系数，有很多建立在极限平衡原理基础上的分析方法，笔者采用经陈祖煜和摩根斯顿改进后的摩根斯顿-普赖斯法[1]。该法适用于任意形状滑裂面，满足力和力矩平衡要求，已在实践中广泛使用。

2．在所有可能的滑裂面中，确定相应最小安全系数的临界滑裂面。这个步骤包含了一个用最优化方法计算最小值的数学算法，笔者已在文献[2]中作了详细介绍。

笔者在使用普遍认为的最优化方法中的十分有效的DFP法时，发现对某些问题的结果不够理想。研究后发现此问题和边坡稳定分析的一些特殊性有关。经过改进，得到了基本解决。现将改进的方法作一介绍，作为文献[2]的补充*。

一、方法简介

设某一边坡的滑裂面由连结n个点A_1，A_2，……A_n的直线或曲线构成（图1），则该滑裂面的安全系数F可表达为该n个点的坐标x_1，y_1，x_2，y_2，……x_n，y_n的函数：

$$F = F(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots\cdots x_n, y_n) \tag{1}$$

*在笔者发表的英文论文［3］中，对此问题也作了探讨和分析。

使安全系数F获得极小值F^m的相应的滑裂面是由连结B_1，B_2，……B_n的直线或曲线构成的，相应的坐标x_1^m，y_1^m，……x_n^m，y_n^m使由式(1)决定的F值取得极小值F^m。

$$F^m = F(x_1^m, y_1^m, x_2^m, y_2^m, \cdots\cdots x_n^m, y_n^m) \qquad (2)$$

确定一个初始滑裂面A_1，A_2，……A_n后，采用最优化方法，就可以找到B_1，B_2，……B_n及相应的F^m。

图2示一具有塑性力学理论解的例子。对一承受垂直表面荷载q的无重量、无摩擦角的边坡，塑性力学给出的极限承载能力q_e为[4]：

$$q_e = 2c\left(1 - \psi - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (3)$$

其中c为凝聚力，ψ为边坡相对水平线的倾角。

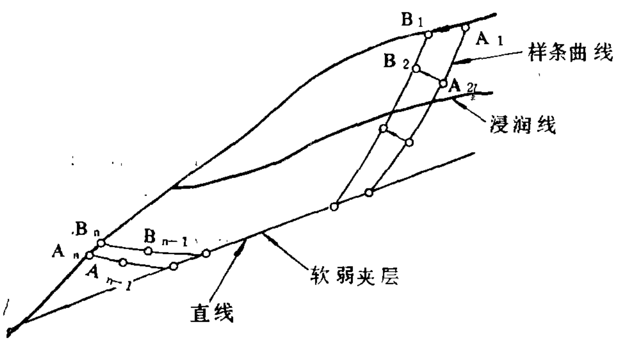

图 1　滑裂面及其控制点

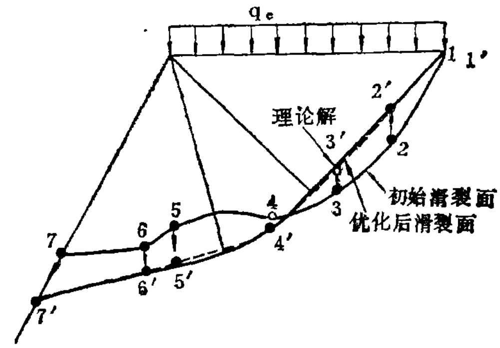

图 2　具有塑性力学理论解的例题

设初始滑裂面为由1，2，3，4，5，6，7点连成的光滑曲线，相应安全系数为1.1011。采用最优化方法后，得到使安全系数取得最小值的相应点1′，2′，3′，4′，5′，6′，7′，相应安全系数为1.0089。连结此七个点的光滑曲线与塑性力学给出的理论滑裂面几乎重合。

采用DFP法计算F^m的步骤如下：

(1) 确定一个初始滑裂面，其相应的控制点的坐标用向量Z^0表示

$$Z^0 = (x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0, \cdots\cdots x_n^0, y_n^0)^T \qquad (4)$$

计算其相应安全系数F^0。

(2) 确定搜索方向S^0，具体方法下面介绍。

(3) 对Z^0赋一增量αS^0，取α使$F(Z^0+\alpha S^0)$获得极小值。决定α采用最优化方法中一维搜索的原理。这样，我们获得第一个迭代步的向量$Z^1 = Z^0 + \alpha S^0$，相应安全系数为F^1。

(4) 若$|F^1 - F^0| < \varepsilon$，认为迭代已收敛，所得$F^1$值即为最小值$F^m$。否则，进行下一个迭代步，以$Z^1$和$F^1$为起点重复1到3的步骤。$\varepsilon$为迭代收敛精度要求，我们取$\varepsilon = 1.5 \times 10^{-5}$。

在某一迭代步ν，S^ν是由下式计算决定的

$$S^\nu = -A^\nu G^\nu \qquad (5)$$

其中

$$G^{\nu}=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1^{\nu}},\ \frac{\partial F}{\partial y_1^{\nu}},\ \cdots\cdots\frac{\partial F}{\partial x_n^{\nu}},\ \frac{\partial F}{\partial y_n^{\nu}}\right) \tag{6}$$

在$\nu+1$迭代步，$A^{\nu+1}$由下式确定：

$$A^{\nu+1}=A^{\nu}+C^{\nu}-D^{\nu} \tag{7}$$

$$C^{\nu}=\frac{\Delta Z_{\nu}\Delta Z_{\nu}^{T}}{\Delta Z_{\nu}^{T}Y_{\nu}} \tag{8}$$

$$D^{\nu}=\frac{A^{\nu}Y_{\nu}(A^{\nu}Y_{\nu})^{T}}{Y_{\nu}^{T}A^{\nu}Y_{\nu}} \tag{9}$$

$$Y_{\nu}=G^{\nu+1}-G^{\nu} \tag{10}$$

$$\Delta Z_{\nu}=Z^{\nu+1}-Z^{\nu} \tag{11}$$

在第一个迭代步，A^0取单位矩阵I，此时

$$S^0=-G^0 \tag{12}$$

即在负梯度方向进行一维搜索。如果对每一个迭代步，均取A^{ν}为单位矩阵，则DFP法退化为负梯度法。

二、问题和改进的方法

当采用DFP法进行计算时，发现在一些情况下，计算结果并不令人满意，如图3所示例题。滑裂面由ABC组成，计算时令C点固定不动，A、B两点的y坐标值不变，则该滑裂面的安全系数F由A点的x坐标x_1和B点的x坐标x_2决定。图4所示为F相应x_1、x_2的等值线。图中标有1、2、3的折线分别代表图3所示的初始滑裂面用负梯度法迭代的过程。这几种情况均很好地收敛到$Z^m=(x_1,\ x_2)^T=(92.0,\ 143.0)^T$处，相应$F^m=1.257$。如果采用DFP法，以第4条滑裂面（图4）作为初始面，则第一次迭代从A处到B处，根据式(5)计算的搜索方向如BC_1所示。可见在此方向搜索是无效的。又如图5所示一例，对初始滑裂面ABCD，采用DFP法得到的临界滑裂面为$A_1'B_1'C_1'D_1'$（标为4的折线），相应最小安全系数为1.0346。但采用负梯度法和单形法所得的最小安全系数为1.025，相应的临界滑裂面相互重合（分别标为2和3的折线）。显然后者的计算成果更为合理。

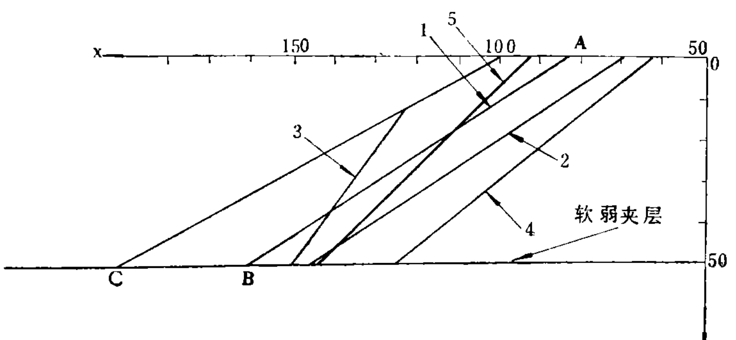

图3 例题2

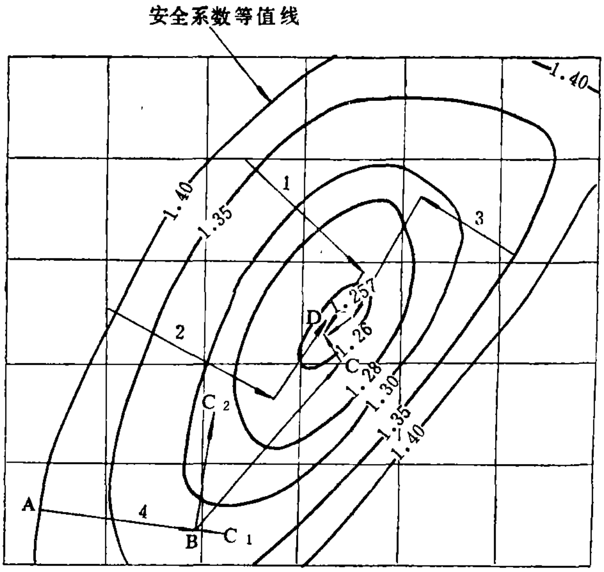

图 4　图 3 所示例题的等值线和优化迭代过程

第 4 号滑裂面　第二次一维搜索的方向为：

BC_1：修改前的DFP法

BC：修改后的DFP法

BC_2：负梯度法

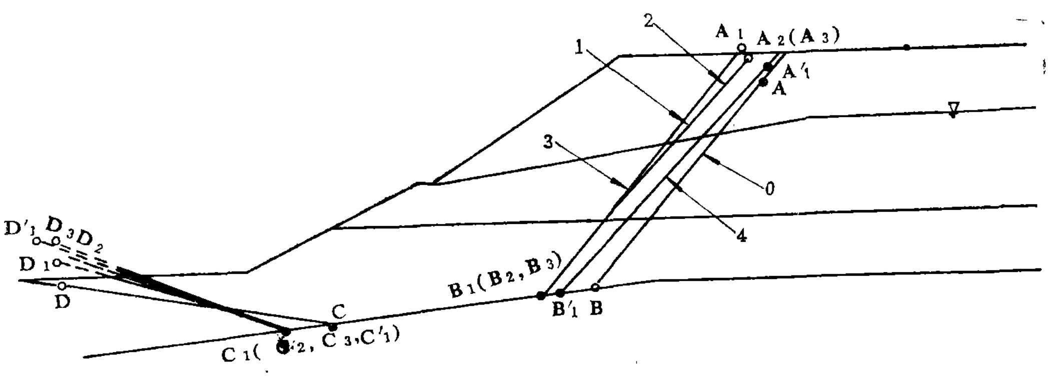

图 5　各种优化方法优化结果比较 0：初始滑裂面；　2，3：用单形法和负梯度法获得的临界滑裂面；4：采用未改进的 DFP 法获得的临界滑裂面；1：采用改进后的DFP法获得的临界滑裂面

注：A_2和A_3；B_1，B_2，B_3；C_1，C_2，C_3和C_1'分别基本重合。

经过深入研究后，发现这个问题主要是由F对控制点的坐标x、y的二阶导数的量纲引起的。DFP法的基本思想是通过迭代使A^0、A^1、A^2、……A^n逼近极值点处海色矩阵H的逆矩阵。相应某一向量$(z_1, z_2, \cdots z_n)^T$的函数F的海色矩阵定义为：

$$
H=\begin{bmatrix}
\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1\partial z_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1\partial z_n} \\
 & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2\partial z_n} \\
 & & \cdots\cdots & \\
\text{对称} & & & \\
 & & & \frac{\partial^2 F}{\partial z_n^2}
\end{bmatrix} \tag{13}
$$

在边坡稳定分析中，$\partial^2F/\partial z_i\partial z_j$的量纲通常在$10^{-2}$—$10^{-5}$范围内，即$H^{-1}$的各元素数值的量纲大约在$10^2$—$10^5$范围内。常规方法初始迭代采用的$A^0$，如前所述为单位矩阵，其量纲和最终要趋近的$H^{-1}$的量纲相距甚远，因此有时会出现收敛困难。

改进后的方法取

$$
A^0 = I\times 10^p \tag{14}
$$

其中p为对H^{-1}量纲的平均值的一个估值，可按下式确定

$$
10^p \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2}\right|^{-1}}{n} < 10^{p+1} \tag{15}
$$

本例的计算结果表明，此改进是成功的。图 4 中ABCD代表了改进后的DFP法迭代过程，最终成果非常好地收敛到极值点。图 5 中标为 1 的折线为改进后的DFP法计算所得临界滑裂面。它和负梯度法、单形法的成果很接近，$F^m=1.0250$，前者的成果甚至更小一点。

DFP法被公认为最优化方法中极为有效的计算方法。对此法的改进有利于搜索最小安全系数的算法在实践中推广。

参 考 文 献

[1] Chen Z, Morgenstern N.R., Extensions to the Generalized Method of Slices for Stability Analysis, *Canadian Geotechnical Journal*, 1983, 20, 104—109.

[2] 陈祖煜、邵长明，最优化方法在确定边坡最小安全系数方面的应用，《岩土工程学报》，1988, 4 (10), 1—13。

[3] Chen Z, Shao C., Evaluation of Minimum Factor of Safety in Slope Stability Analysis, *Canadian Geotechnical Journal*, 1988, 25, 735—748.

[4] 王仁、黄文彬，《塑性力学引论》，北京，北京大学出版社，1982，163—166。