

52. 改进的通用条分法的收敛特性和计算精度

陈祖煜 (水利水电科学研究院)

土坡稳定分析的通用条分法在实际中有较广泛的应用。从文献〔3〕、〔4〕、〔5〕、〔7〕、〔8〕、中可看到,数值计算的收敛问题受到普遍的关注。因此,有必要建立一些数值计算的方法来保证工程中遇到的问题总能获得收敛的解。作者和摩根斯顿〔1〕、〔9〕曾对摩根斯顿—泼赖斯法作了一些推广,其部分目的就是为了解决数值计算的收敛问题。本文拟对此再作一详细的说明。

数值计算的收敛特性

作者和摩根斯顿在推广通用条分法时,对边坡稳定的条分法的数学提法明确为求满足力和力矩平衡方程式。

$$G_n = \int_a^b p(x)s(x)dx = 0 \quad (1)$$

$$M_n = \int_a^b p(x)s(x)t(x)dx = 0 \quad (2)$$

的安全系数 F 和 λ 值。式(1)和(2)中

$$p(x) = \frac{dw}{dx} \sin(\varphi'_s - \alpha) + q \sin(\varphi'_s - \alpha) - r_u \frac{dw}{dx} \sec \alpha \cos \varphi'_s + c'_s \sec \alpha \cos \varphi'_s \quad (3)$$

$$s(x) = \sec(\varphi'_s - \alpha + \beta) \exp\left[-\int_a^x \tan(\varphi'_s - \alpha + \beta) \frac{d\beta}{d\zeta} d\zeta\right] \quad (4)$$

$$t(x) = \int_a^b (\sin \beta - \cos \beta \tan \alpha) \exp\left[-\int_a^x \tan(\varphi'_s - \alpha + \beta) \frac{d\beta}{d\zeta} d\zeta\right] \quad (5)$$

式(1)至(5)中的各物理量的含义以及座标的正方向和文献〔1〕中的意义一样,不再重复,但也可参考图1对各物理量的示意。

在式(1)和(2)中,仅包含两个未知数。一是安全系数 F ,它是隐含在对 φ'_s 的定义中

$$\tan \varphi'_s = \tan \varphi' / F \quad (6)$$

另一是 β ,它是包含在对土条间侧向力的假定

$$\tan \beta = \lambda f(x) + f_0(x) \quad (7)$$

中的。当对 $f(x)$ 和 $f_0(x)$ 作出假定后,数值计算的注意力就集中在求解满足式(1)和(2)的 F 和 λ 值上了。改进的通用条分法采用了以下方法来保证收敛。

(1)采用牛顿-勒普生法迭代求解。本次迭代和下次迭代 F 和 λ 的差值用下式确定。

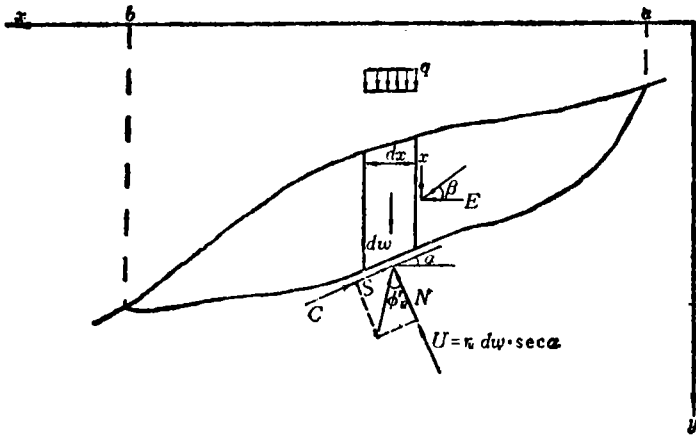


图1 稳定分析条分法简图

$$\Delta F_i = F_{i+1} - F_i = \frac{G_n \frac{\partial M_n}{\partial \lambda} - M_n \frac{\partial G_n}{\partial F}}{\frac{\partial G_n}{\partial \lambda} \frac{\partial M_n}{\partial F} - \frac{\partial G_n}{\partial F} \frac{\partial M_n}{\partial \lambda}} \quad \left| \lambda = \lambda_i, F = F_i \right. \quad (8)$$

$$\Delta \lambda_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i = \frac{-G_n \frac{\partial M_n}{\partial F} + M_n \frac{\partial G_n}{\partial F}}{\frac{\partial G_n}{\partial \lambda} \frac{\partial M_n}{\partial F} - \frac{\partial G_n}{\partial F} \frac{\partial M_n}{\partial \lambda}} \quad \left| \lambda = \lambda_i, F = F_i \right. \quad (9)$$

一个重要的改进是, $\frac{\partial G_n}{\partial \lambda}$ 、 $\frac{\partial M_n}{\partial \lambda}$ 、 $\frac{\partial G_n}{\partial F}$ 、 $\frac{\partial M_n}{\partial F}$ 均已用变分原理导出了精确的表达式。这些表达式已在文献〔1〕中给出。和摩根斯顿-泼赖斯法的原来的表达式相比〔8〕, 改进后的数学处理更为严密了, 因此, 获得了很好的收敛性能。

土 号	容 重 kN/m ³		c' kN/m ²	φ'
	湿 容 重	饱 和 容 重		
I	19.8	20.58	5.0	20°
II	19.8	20.58	0	33°

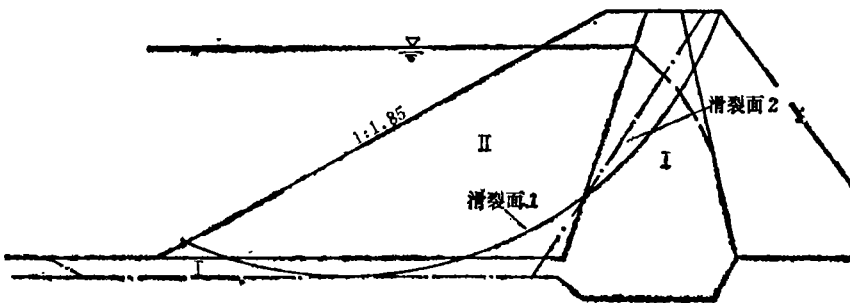


图2 收敛性能研究示例

图2是检查收敛性能的一个例子。使用了改进后的通用条分法(相应 $f(x)=1, f_0(x)=0$)和杨布法。对圆弧滑裂面1, 两种方法初始假定的 F_1 均为1.861[图3(a)], 使用改进后的摩根斯顿-泼赖斯法, 仅经过两次迭代, 即满足了收敛要求, 即 ΔF 和 $\Delta \lambda$ 绝对值小于0.001。使用杨布法, 我们控制前后两次迭代差值不大于0.005, 这样, 经过10次迭代, 可以得到 F 值在1.972和1.977之间。这个数值和摩根斯顿-泼赖斯法的解是接近的。第二次试算时, 用于第一次迭代的 F 值为1.582。改进后的摩根斯顿-泼赖斯法仍然只需要三次迭代获得了收敛解, 而杨布法则需要13次[见图3(b)]。如果我们改用图2所示非圆弧滑裂面2, 则改进后的摩根斯顿-泼赖斯法仍然只需三次迭代, 而杨布法却无法获得收敛解[见图3(c)]。

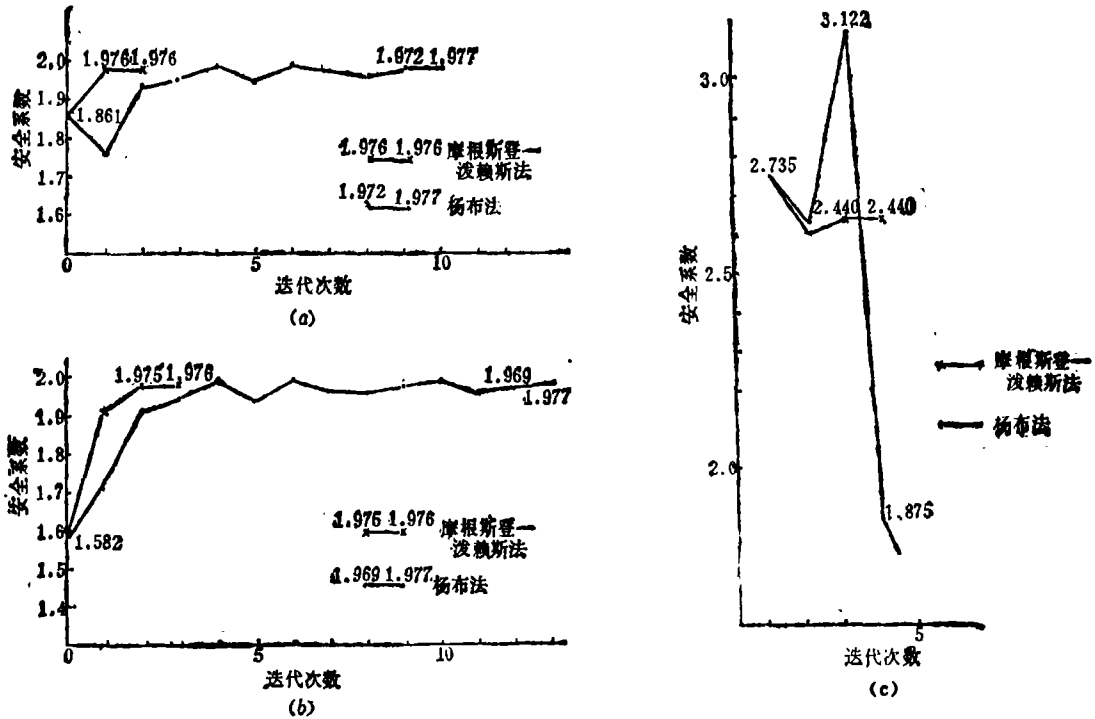


图3 迭代过程

(a)破坏面1 ($F_0 = 1.86$)的迭代过程, (b)破坏面1 ($F_0 = 1.582$)的迭代过程, (c)破坏面2的迭代过程

(2)第一次迭代假定的 F 值和 λ 值应尽可能接近最终解。可以用现有的滑弧稳定分析的各种简化方法来估算 F 。但这些方法有两个缺点, 一是大多数简化方法只能用于圆弧或直线形滑裂面, 对任意形状滑裂面不适用, 其次, 大多数这些办法本身需要迭代求解, 仍存在着一个收敛的问题。作者推荐了下面一个简化方法来估算 F 和 λ 。

注意到, 当假定

$$\beta(x) = \alpha(x) \tag{10}$$

时, 式(2)就会自动得到满足, 将式(10)代入式(1), 就可得到:

$$F = \frac{\int_a^b [q \cos \alpha \tan \varphi' + \frac{dw}{dx} (\cos \alpha - r_u \sec \alpha) + c' \sec \alpha] \cdot M dx}{\int_a^b \left(q + \frac{dw}{dx} \right) \sin \alpha \cdot M dx} \tag{11}$$

如果令:

$$A = q \cos \alpha \tan \varphi' + \frac{dw}{dx} (\cos \alpha - r_u \sec \alpha) + c' \sec \alpha \quad (12)$$

$$B = \left(q + \frac{dw}{dx} \right) \sin \alpha \quad (13)$$

式(11)还可写成:

$$F = \frac{\int_a^b A \cdot M dx}{\int_a^b B \cdot M dx} \quad (14)$$

其中

$$M = \exp \left[- \left(\frac{\tan \varphi'}{F} \alpha + \frac{K}{F} \right) \right] \quad (15)$$

式(15)中系数 K 是计及滑裂面上突然变化的 φ' 和 α 值影响的一个系数。 K 值在 $x = a$ 时为零,经过第一个不连续点变成 $[\tan \varphi'_1 \cdot \alpha_1]_1'$,经过第二个不连续点再加上一个 $[\tan \varphi'_2 \cdot \alpha_2]_1'$,其中 r 、 l 分别代表该不连续点左边和右边的数值。因此, K 值用下式计算

$$K = \sum_{i=1}^s [\tan \varphi'_i \cdot \alpha_i]_1' \quad (16)$$

其中 α 以弧度计, s 为不连续点总数。

利用式(14)计算 F 值,仍需迭代,因式右端 M 中还包含 F 值。但式(14)还可用下面一个不需迭代的算式近似求解。

$$F = \frac{\int_a^b (A + B\xi) dx}{\int_a^b B dx} - \frac{\int_a^b A\xi dx}{\int_a^b (A + B\xi) dx} \quad (17)$$

其中

$$\xi = \tan \varphi' \cdot \alpha - \tan \varphi'_{s,v} \cdot \alpha_{s,v} + K \quad (18)$$

$\varphi'_{s,v} \cdot \alpha_{s,v}$ 为沿滑弧面 φ' 和 α 的平均值。

式(17)是作者建议的用来估算迭代第一次假定的 F 值的公式。式(14)和(17)具有以下特点。

(1)在推导过程中,没有对滑裂面形状作过假定,因此式(17)和(14)原则上适用于任意形状滑裂面。

(2)式(14)给出的是同时满足力和力矩平衡条件的解,因此和其它简化方法比较,可能有较高的精度。

(3)在边坡稳定分析中,最简单的方法,是众所周知的瑞典条分法(费伦纽斯法),按下式计算。

$$F = \frac{\int_a^b A dx}{\int_a^b B dx} \quad (19)$$

将式(19)和式(14)、式(11)比较,可以看到,它们具有相似的表达式,所不同的是式(14)、(17)增加了一些包含 M 和 ξ 的项,使其结果与式(19)所得 F 值有所不同。在下节对式(14)

我们先使用 F 和 λ 的第一次迭代估计值 $F = 0.60$, $\lambda = 0.45$, 进行迭代计算, 发现虽需六次迭代, 如表 1 (情况 1) 所示, 最后仍得收敛解 $F = 1.479$, $\lambda = 0.665$ ($f(x)$ 和 $f_0(x)$ 的假定见图 4 所示)。迭代过程如表 1 情况 1 所示。这说明经过改进后收敛功能确实得到改善。再使用上面谈到的方法, 假设一系列的 F 和 λ 值。例如, 按图 5 所示网格选用 F 和 λ , 然后画出 $(\Delta\lambda^2 + \Delta F^2)$ 的等值线图, 可以看到, 在 $F = 1.50$, $\lambda = 0.65$ 时, $(\Delta\lambda^2 + \Delta F^2)$ 的值最小。这组 F 和 λ 值和精确解 $F = 1.479$, $\lambda = 0.665$ 相当接近。如果用这组 F 和 λ (按 $F = 1.50$, $\lambda = 0.65$) 作为第一次迭代的假定值, 则只需三次迭代即能得到收敛解, 如表 1 情况 2 所示。

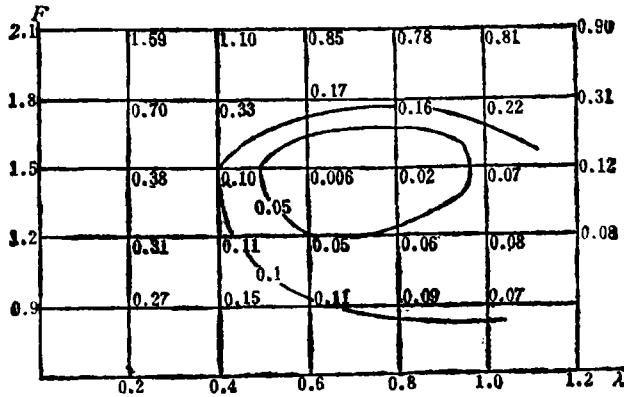


图 5 $(\Delta F^2 + \Delta \lambda^2)$ 的等值线图

图 5 所示实例在两种情况下的迭代过程

表 1

迭 代 次	情 况 1		情 况 2	
	λ	F	λ	F
1	0.450	0.600	0.650	1.500
2	0.586	0.878	0.666	1.477
3	0.600	1.205	0.665	1.479
4	0.670	1.423		
5	0.666	1.477		
6	0.665	1.479		

数值计算的精度

(1) 式(14)和(18)的精度: 在图 6 所示的算例中, 我们进行了一系列圆弧滑裂面在不同的圆弧夹角和孔隙水压力系数 r_u 情况下的计算。从表 2 所示的结果看, 常用的瑞典条分法在圆弧夹角和孔隙水压力变大时, 计算结果和毕肖普法差别甚大, 这一点和韦特曼和贝利^[6]的结论相同。从表 2 的计算结果可以看到, 按式(14)计算得到的成果 F_R 弥补了瑞典法的缺点。例如, 当 $r_u = 0.6$ 圆心夹角为 126.6 度时, 常用瑞典法所得安全系数仅为毕肖普法的 0.58, 而按式(14)所得安全系数为毕肖普法的 0.94。

图 7 是考察非圆弧滑裂面的例子。对于滑裂面 1~5, 采用摩根斯顿-泼赖斯法 ($f(x) = 1$, $f_0(x) = 0$), 和式(18)的计算结果相对比列于表 2, 仍可发现两者结果甚为接近。

不同圆弧夹角和孔隙水压力系数情况下的安全系数值的比较

表2

r_u	夹角	毕肖普法 F_B	瑞典法 F_F	式(14) F_R	F_I/F_B	F_R/F_B
0.0	126.6	4.509	3.700	4.374	0.82	0.96
	95	3.674	3.270	3.632	0.89	0.99
	74	2.392	3.160	3.376	0.93	0.99
	60	3.295	3.146	3.288	0.96	1.00
	50	3.273	3.191	3.270	0.97	1.00
0.2	126.6	3.668	2.852	3.535	0.78	0.96
	95	3.006	2.599	2.966	0.86	0.98
	74	2.795	2.560	2.780	0.92	0.99
	60	2.736	2.584	2.730	0.94	1.00
	50	2.750	2.667	2.747	0.97	1.00
0.4	126.6	2.832	2.004	2.704	0.71	0.96
	95	2.340	1.927	2.304	0.82	0.99
	74	2.198	1.959	2.186	0.89	0.99
	60	2.177	2.023	2.172	0.93	1.00
	50	2.227	2.142	2.225	0.96	1.00
0.6	126.6	2.003	1.156	1.884	0.58	0.94
	95	1.680	1.255	1.650	0.75	0.98
	74	1.604	1.359	1.596	0.75	0.98
	60	1.620	1.462	1.618	0.90	1.00
	50	1.704	1.618	1.704	0.95	1.00

(2)改进后的通用条分法的精度:图4所示例题也提供了一个很好的机会来检验改进后的通用条分法的精确性。当解出 F 和 λ 后,沿破坏面 $ABCD$ 的应力分布和每一土条的侧向力亦均已得知。计算机打印出这些数据后可以发现,通过水体的那部分剪应力确实为零,而正应力和静水压力极为吻合(图4)。上下游水体部分的土条侧向压力也和静水压力值一致。此外,我们还检验了滑动土体的整体平衡。将作用在滑裂面 $ABCD$ 上的应力和滑动体(坝体和水)的自重均向 x 、 y 方向投影,并向点A(图4)取矩。

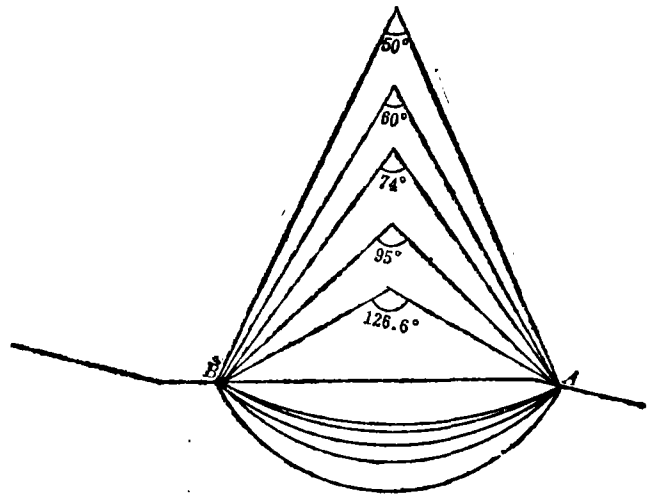


图6 一系列圆弧形滑裂面的例子
 $c' = 1.0t/m^2$, $r = 2.0t/m^2$, $\varphi' = 30^\circ$, $r_u = 0 \sim 0.6$

$$\sum x = \int_a^b (\sigma_n \tan \alpha - \tau) dx = 71.230 \text{ kN}$$

$$\sum y = \int_a^b \frac{dw}{dx} dx - \int_a^b (\sigma_n + \tau \tan \alpha) dx$$

不同方法安全系数的比较 (图6)

表3

破坏面	摩根斯登-波赖斯法 F_s	式(17) F_R	F_R/F_s
1	1.962	1.955	0.99
2	1.917	1.896	0.99
3	2.060	1.952	0.95
4	2.127	2.010	0.95
5	2.230	2.151	0.97

土号	c , t/m ²	φ ,	容重 t/m ³	
			天然重	湿重
I	0.7	26.5	2.01	2.07
II	0	38.0	2.02	2.26
III	0	32.0	2.16	2.31
IV	0.5	26.5	2.01	2.07

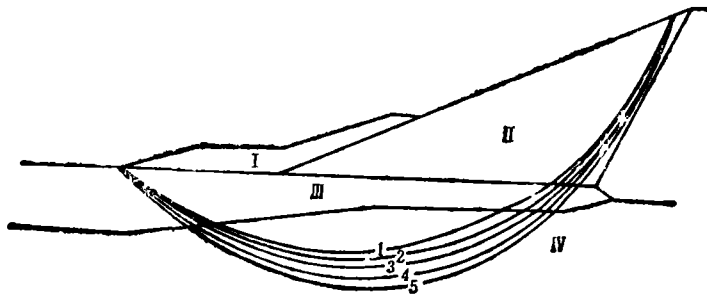


图7 一系列非圆弧滑裂面的例子

$$= 18556.153 - 1860.9439 = -48.786 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = & \int_a^b \frac{dw}{dx} (x - x_0) dx - \left[\int_a^b (\sigma_n + \tau \tan \alpha) (x - x_0) dx \right. \\ & \left. + \int_a^b (\sigma_n - \tan \alpha - \tau) (y - y_0) dx \right] \end{aligned}$$

$$= 1049659.6 - 1055294.3 = -5634.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Σx 、 Σy 、 ΣM_A 在理论上应为零。由于数值计算不可能得到绝对的零值，我们用下面的相对关系来判断精确程度

$$r_x = \frac{\Sigma x}{\int_a^b \frac{dw}{dx} dx} = 0.38\%$$

$$r_v = \frac{\sum y}{\int_a^b \frac{dw}{dx} dx} = 0.26\%$$

$$r_m = \frac{\sum M_i}{\int_a^b \frac{dw}{dx} (x - x_0) dx} = 0.54\%$$

可以看到，精度是令人满意的。说明所得的解确实满足了力和力矩平衡的要求。

参 考 文 献

- [1] Chen, Z.Y. and Morgenstern N.R. (1983), Extensions to the Generalized Method of Slices for Stability Analysis, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 20, No.1, pp.104-119.
- [2] Hamel V. Long S. and Ferguson H. (1976), Mahoning Dam Foundation Re-evaluation, Rock Engineering for Foundations and Slopes, ASCE Conference, Vol. 1, pp.217-244.
- [3] Morgenstern N.R. and Price V.E. (1967), A Numerical Method for Solving the Equations of Stability of General Slip Surfaces, Computer Journal, Vol. 9, No.4, pp.388-393.
- [4] Sama S.K. (1968), The Stability Analysis of Slopes of Embankments and Slopes, Geotechnique, XXIII, No.3, pp.423-433.
- [5] Soriano A. (1976), Iterative Schemes for Slope Stability Analysis, Numerical Method in Geomechanics, Vol.2, pp.713-724.
- [6] Whitman R.V. and Bailey W.A. (1967), Use of Computers for Slope Stability Analysis, Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol.93, No.SM4, July, PP.475-498.
- [7] Wright S.G. (1969), A Study of Slope Stability and the Undrained Strength of clay Shales, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley.
- [8] Wright S.G. (1974), Workshop Session 9, Slope Stability Analysis, closure, Analysis and Design in Geotechnical Engineering, ASCE.
- [9] 陈祖煜, 土坡稳定分析通用条分法及其改进, 《岩土工程学报》, 1983年, 第5卷第4期。