

黄文熙讲座

土力学经典问题的极限分析上、下限解

Limit analysis for the classic problems of soil mechanics

陈祖煜

(中国水利水电科学研究院 岩土工程研究所, 北京 100044)

[按]: 2002 年黄文熙讲座共有两篇, 撰稿人分别为黄熙龄院士和陈祖煜教授。原定黄熙龄院士的文稿在本刊 2002 年第 1 期刊出, 现因故延至 2002 年第 2 期。

摘要: 边坡稳定极限分析的垂直条分法和斜条分法分别建立于塑性力学下限和上限原理之上。垂直条分法可以推广到各种支挡结构主动土压力领域, 斜条分法可以推广到地基承载力的领域。由于采用数值方法求解临界滑动模式, 因此, 适用于土体形状不规则、分层、具有地下水等复杂情况。分析计算的成果表明, 这一理论体系在简单条件下, 可以回归为经典的土压力和地基承载力问题, 获得精确的闭合解; 在无法获得纯理论解的情况下, 能给出与目前采用的各种经验方法基本一致的计算结果。这样, 土力学中边坡稳定、土压力和地基承载力这三个领域可以在同一理论框架下获得实用的数值分析方法。

关键词: 边坡稳定; 土压力; 地基承载力; 极限分析

中图分类号: TU 432

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2002)01-0001-11

作者简介: 陈祖煜(1943—), 男, 浙江宁波人。1966 年本科毕业于清华大学水利系, 1979—1981 年, 教育部公派到加拿大 Alberta 大学做访问学者, 1989—1991 年师从黄文熙教授, 并获清华大学工学博士学位。现任中国水利水电科学研究院教授级高级工程师, 清华大学、河海大学兼职教授, 曾任中国水利水电科学研究院副院长(1984—1989)。1983 年和 Morgenstern 教授一起系统地改进了在边坡稳定分析领域中占有重要学术地位的 Morgenstern-Price 法, 引起了国内外学术界的广泛关注, 在此基础上, 提出了边坡稳定二、三维塑性力学上、下解方法。长期从事边坡稳定的理论分析和工程实践工作, 已在国内外重要学术刊物和会议论文集发表论著 80 余篇。1995 年以来, 先后应邀在亚洲土力学与基础工程学会、国际岩石力学大会和岩土工程千年会议(GeoEng' 2000)等国际学术会议上作边坡工程的专题报告或总报告。主持了多个国家科技攻关和部级科研项目, 并获两项国家科技进步奖, 1999 年获茅以升土力学与基础工程大奖。先后参加了韩城、漫湾、天生桥、二滩、紫坪铺、李家峡、天荒坪、三峡、小浪底、昌马等边坡工程的咨询和科研工作, 并作为世界银行邀请的专家参加了长江干堤加固工程等 4 个大型水利工程的咨询活动。

CHEN Zu-yu

(China Institute of Water Resource and Hydropower Research, Beijing 100044, China)

Abstract: The methods of slices with vertical and inclined interfaces described in this paper are based on the upper bound and lower bound theorems of plasticity respectively. The method of vertical slices can be extended to the area of active earth pressure, while that of inclined slices can be applied in bearing capacity analysis. The numerical approaches included in this method for finding the critical failure modes allows the method to be applied to problems with complicated geometry, layered cross section and ground water conditions.

Key words: slope stability; soil pressure; bearing capacity of ground; limit analysis

1 前言*

边坡稳定、土压力和地基承载力是土力学的三个经典问题。很多学者认为这三个领域的分析方法属于同一理论体系, 即极限平衡分析和极限方法, 因此, 应该建立一个统一的数值分析方法^[1,2]。黄文熙教授在这三个领域均作过深入的研究。在砂性土土压力方面, 黄教授^[3]利用谷仓理论, 正确地指出了土压力的作用点位置在 $1/2$ 至 $1/3$ 墙高之间, 最可能的数值为



0.444。这些结论和 Terzaghi—Peck^[4] 提出的经验方法几乎不谋而合, 但早于西方学者 10 余年。

作用于支挡结构上的土压力问题实际上是个具有垂直表面并且在此表面作用有侧向外荷的边坡稳定问题。传统的库仑主动土压力理论使用的分析方法和边坡稳定方法也是类似的。这一方法假定墙后土体一部分沿一个直线滑裂面滑动。通过分析由墙土结合面、滑

* 收稿日期: 2001-09-02

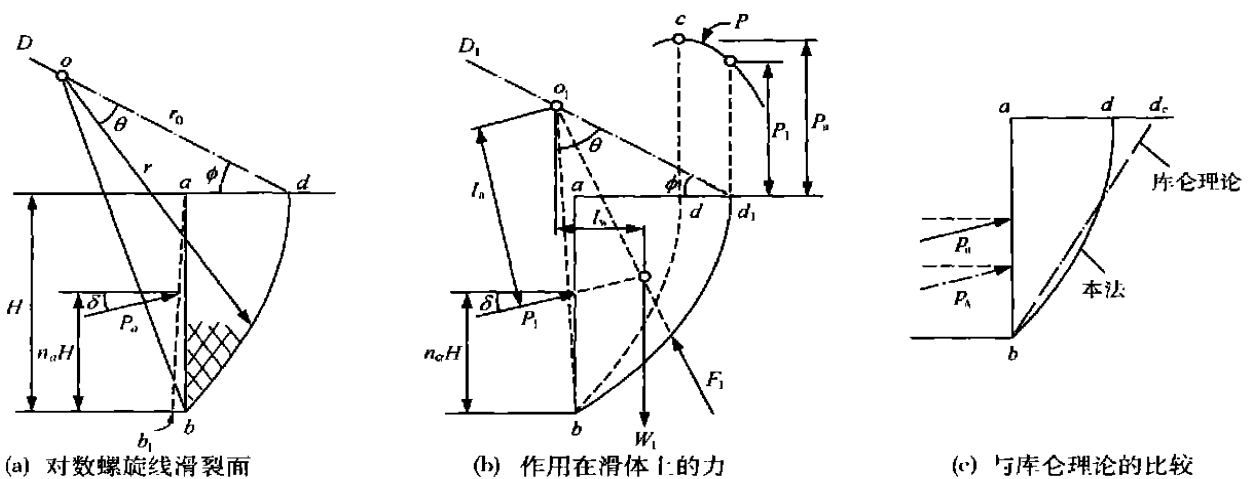


图1 Terzaghi 和 Peck 建议的计算柔性支挡结构的土压力的方法

Fig. 1 Method for calculating active earth pressure on flexible supporting structure proposed by Terzaghi and Peck

裂面和土体表面构成的三角形的土体的力的平衡,可计算土体作用在墙上的主动土压力 P 。不断变动直线滑裂面的位置,可以找得使 P 获得极大的临界滑裂面。这一极大值就是按库仑土压力理论获得的主动土压力。

我们知道,库仑主动土压力理论一般不在柔性支挡结构领域中使用。Casagrade^[5]在调查了德国和巴拿马运河的一系列锚拉墙破坏实例后指出,作用在各种柔性支挡结构上的土压力通常要比按传统的库仑方法确定的主动土压力大,其数值接近土的静止土压力。Terzaghi 和 Peck^[4]曾使用大量篇幅对这一问题作出解释。在回顾土压力理论发展 50 a 的历史后,Peck^[6]教授曾作过这样的总结:

“我们现在已经知道,土压力的分布是和变形特征相关联的。我们高度赞赏 Terzaghi 在这一问题上作出的杰出贡献。这一极有意义的发现是他在 Robert 大学所作的香烟盒试验和麻省理工学院所作的大型模型试验中得到的。他通过这些试验说明,土压力的合力的作用点可以在中点和下三分点之间的任一位置。”

Terzaghi 和 Peck^[4]采用如图 1 所示的方法,试图通过加入力矩平衡条件来计及土压力作用点位置的影响,据此提出了一套柔性支挡结构的土压力经验系数,已在工程界广泛使用。显然,无论库仑方法,还是 Terzaghi 和 Peck 方法,都是边坡稳定分析中的极限平衡法的特例,只是限于当时的条件,这些计算方法引入了相当多的简化条件。

地基承载力分析是另一种类型边坡稳定问题。这个边坡具有一个水平的表面。这一领域和传统的垂直条分法的一个重大的区别,就是假定滑裂面所包含的不稳定土体全部达到了极限平衡。而边坡稳定的垂直条分法由于不要求在条块的垂直界面也达到极限平衡,故一般不推广到地基承载力分析中。传统的地基

承载力理论,是以在均匀、无重量的条件下推导出的著名的 Prandtl 解为基础的。但当遇到土体具有自重,两侧具有表面荷载,以及基础具有埋深、偏心荷载等情况时,无法获得理论解,则引入了各种经验修正系数。这些修正,仍然没有考虑倾斜荷载、地下水、地基分层等多种复杂的因素。

Prandtl 解属于塑性力学上限解的范畴。近期,Donald 和 Chen^[7]提出了对土体进行斜分条的塑性力学上限解法,并使用最优化方法来求解临界破坏模式。由于这一方法与 Prandtl 解具有相同的理论基础,故可以很好地收敛到现有的一系列已知的闭合解。这样,在地基承载力领域,也获得了一个可以适用于各种复杂情况的数值分析方法。

在塑性力学上、下限定理及条分法基础上,有条件建立求解土力学经典问题的统一的、实用的数值解法。

2 理论基础——塑性力学的上、下限定理

2.1 一般提法

土体稳定分析的基本提法和求解固体力学问题是一致的,即在一个确定的荷载条件下,寻找一个应力场 σ_{ij} 和位移场 u_i ,以及相应的应变场 ϵ_{ij} ,它们满足下列条件(以张量形式表达)。

(1) 静力平衡

$$\sigma_{i,j} = W_i \quad (1)$$

其边界条件是

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \quad (2)$$

其中, W_i 为体积力, T_i 为作用于表面 S 上的边界力, n_j 为 S 面法线的方向导数。

(2) 变形协调

$$\epsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (3)$$

虚功原理是反映静力平衡和变形协调的另一个表达形式,即相应任一满足式(1),(2)的应力场和式(3)的位移场,有

$$\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv = \int_V W_i \cdot u_i dv + \int_S T_i u_i ds \quad (4)$$

(3)本构关系

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (5)$$

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (6)$$

式(5),(6)分别反映了材料必须遵守的应力应变关系和强度准则。其中 C_{ijkl} 为反映弹性或弹塑性的本构关系的张量表达式。 f 为屈服面函数。

式(6)通常采用摩尔—库仑准则,即

$$f(\sigma_{ij}) = \tau - (\sigma_n \tan \varphi + c) \leq 0 \quad (7)$$

σ_n 和 τ 为破坏面上的法向和剪切应力, c 和 φ 为抗剪强度指标。在一般的岩土材料中,我们还提出不容许出现拉应力的限制条件,即

$$\sigma_3 \geq 0 \quad (8)$$

σ_3 为土体内任一点的小主应力。

2.2 塑性力学的上、下限定理

全面满足上述条件的解答,即是反映实际情况的真实解。而土体稳定分析问题则仅关心土体在失稳时的极限承载能力,不一定需要了解此时变形的具体量值。这样,就有可能回避最难以准确确定的式(5)中的 C_{ijkl} ,在工程实践中找到能基本反映上述条件的简化方法。

下限定理从构筑一个静力许可的应力场入手,认定凡是满足式(1),(2)和式(7),(8)的应力场所相应的外荷载 T_i^* 一定比真实的极限荷载小。上限定理从构筑一个处于塑性区 Ω^* 内和滑裂面 Γ 上的协调的位移场 u_i^* 出发,认定凡是满足式(4)和(7)中的等式所相应的外荷载一定比相应真实的塑性区 Ω 的真实的极限荷载大。由于弹性变形通常相对塑性变形小许多,所以在应用上限定理通过式(4)确定外荷载时,还可以将其中的 u 仅理解为塑性变形。

用塑性力学上、下限定理分析边坡稳定问题,就是从下限和上限两个方向逼近真实解。

在实际工程中我们分析的对象往往是一个具有一定安全储备的结构。分析这样一个结构的稳定性的提法往往是这样的:对某一处于稳定的结构,需要一个多大的外部干扰因素,方可将其过渡到极限状态。在塑性力学和边坡稳定领域,通常有以下三种处理方案。

(1)方案1 如果边坡表面作用有荷载 T^0 ,那么,可以将这个荷载增加到直至破坏。此时的荷载为 T ,定义加载系数为

$$\eta = \eta = (T - T^0)/T^0 \quad (9)$$

这一定义在地基承载能力问题中可得到广泛的应用。

(2)方案2 极限状态是通过施加一个假想的水水平体积力 $\eta_b W$ 实现的。其中 W 为滑坡体的自重。Samma^[8] 首先提出这一思路,并称 η_b 为临界加速度系数。这一方案在边坡问题中较适用,因为大多数的边坡问题中不存在表面荷载。

采用方案(1),(2), η_t 或 η_b 通常可以直接通过一个公式求得,不需迭代。同时,这两种处理与塑性力学上、下限定理中的加载概念一致,因此,可以获得较坚实的理论基础。

(3)方案3 定义安全系数 F 是这样的一个数值,如果材料的抗剪强度指标 c' 和 φ' 按下式降低为 c_e' 和 φ_e' ,那么,边坡处于极限状态。

$$c_e = c'/F \quad (10)$$

$$\tan \varphi_e' = \tan \varphi'/F \quad (11)$$

采用这一方法时, F 常以隐式出现在求解的方程式中,需要进行迭代。为了表达方便,在以下的叙述中,我们为这三种方案提供统一的计算公式。对出现下标 e 的物理量,如相应方案(1)和方案(2),则意味着式(10)和(11)中的 F 值为1。

3 土体稳定问题的下限解——垂直条分法

3.1 理论框架

垂直条分法假定边坡内存在一潜在的滑裂面。在这一滑裂面上,处处达到了极限平衡状态。将这一滑动土体分成具有垂直边界的条块,分析图2(c)所示的作用于垂直土条上的力,可以发现,在这个土条上,存在着4个未知量,即作用于土条底面的法向力 N' ,作用于土条侧面的总作用力 G ,它的倾角 β 以及该力作用于侧面上的位置 y_1 。但对这个土条可建立的平衡方程只有3个,即二个静力平衡方程和一个力矩平衡方程。因此,需要对其中某一未知函数作出适当的假定,在相应的边界条件下求解安全系数 F 值。通常,我们对土条侧面作用力的 $G(x)$ 的倾角 β 作以下假定(参见图2(b)):

$$\tan \beta = f_0(x) + \lambda f(x) \quad (12)$$

式中 $f_0(x)$ 为一线性函数,它保证 $f_0(a)$ 和 $f_0(b)$ 的数值分别等于 $\tan \beta$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 的设定数值(参见3.3.3节的讨论)。 $f(x)$ 为保证 $f(a)$ 和 $f(b)$ 为0的任意函数。在实际应用中,经常两种假定,第一种假定取 $f_0(x)=0$, $f(x)=1$,即为 Spencer 法。第二种假定取 $f(x)$ 为一正弦曲线,如图2(b)所示。引入假定的函数后,可以通过下节介绍的方法,解得安全系数 F (或土压力 P) 和 λ 这两个未知量。

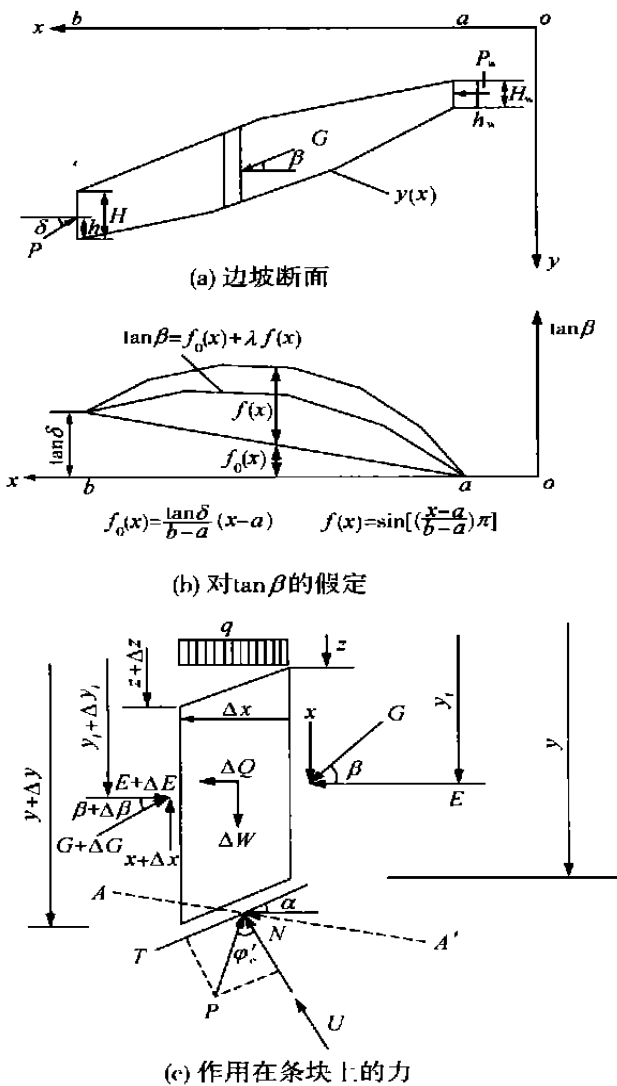


图2 边坡稳定的垂直条分法

Fig. 2 The method of vertical slices for slope stability analysis

由于引入假定的函数 $f_0(x)$ 和 $f(x)$ 可以是多种多样的, 那么安全系数 F 的解答也就不可能是唯一的。垂直条分法理论体系要求, 所有的这些解答, 都要接受以下的合理性条件的限制。式(7)和(8)具体化为

$$\frac{[E' \tan \varphi_{av}' + c_{av}' h]}{X} > F \quad (13)$$

$$E' > 0 \quad (14)$$

$$N > 0 \quad (15)$$

式中 E' , X 分别为作用于侧面的有效作用力和切向力, φ_{av}' 和 c_{av}' 为侧面上的平均有效抗剪强度指标, h 为土条高度, N 为作用于条块底部的法向作用力。

Chen 和 Morgenstern^[9] 发现, 在物理合理性条件的限制下, 不同假定函数相应的安全系数的差别微小。这样, 就建立了垂直条分法的理论框架。

3.2 垂直条分法的静力平衡方程及其解

对图2(c)所示条块, 建立 x , y 方向的静力平衡方

程, 可得

$$\cos(\varphi_e' - \alpha + \beta) \frac{dG}{dx} - \sin(\varphi_e' - \alpha + \beta) \frac{d\beta}{dx} G = -p(x) \quad (16)$$

其中

$$p(x) = \left(\frac{dW}{dx} + q \right) \sin(\varphi_e' - \alpha) - r_u \frac{dW}{dx} \sec \alpha \sin \varphi_e' + c_e' \sec \alpha \cos \varphi_e' - \eta \frac{dW}{dx} \cos(\varphi_e' - \alpha) \quad (17)$$

式中 G 为土条间作用力的大小; α 为土条底倾角, β 为 G 与水平线的夹角; dW/dx 为土条单位宽的重量; r_u 为孔隙水压力系数, $r_u = \frac{u}{dW/dx}$, u 为孔隙水压力; q 为单位宽度上表面垂直荷重; c_e' 为土体有效凝聚力, φ_e' 为土的有效内摩擦角; η 为水平地震力系数。

对条底中点建立力矩平衡方程, 可得

$$G \sin \beta = -y \frac{d(G \cos \beta)}{dx} + \frac{d}{dx} (y_i G \cos \beta) + \eta \frac{dW}{dx} h_i \quad (18)$$

式中 h_i 为水平地震力作用点与条底的距离; y_i 为 G 作用点的 y 坐标值。

微分方程组(16)和(18)的边界条件是: $G(a) = P_w$, $G(b) = P$, $h/H = \kappa(b)$, $\beta(a) = 0$, $\beta(b) = \delta \kappa(a) = h_w/H_w = 1/\beta$ 。其中, P_w 为顶端拉力缝($x=a$)上作用的水压力, 即 $G(a)$; P 为 $x=b$ 处的条间作用力 $G(b)$, 在土压力问题中, 也就是待求的主动土压力; h 为土压力的作用点到土条底的距离, 即在 $x=b$ 时的 $(y - y_i)$ 值; δ 为墙和土接触面作用力的倾角, 即 $x=b$ 时的 β 值。

根据上述边界条件, 可获得边坡稳定垂直条分法的力和力矩平衡方程式的积分形式, 分别为

$$\int_a^b p(x) s(x) dx = G_m \quad (19)$$

$$\int_a^b p(x) s(x) t(x) dx = M_m \quad (20)$$

其中

$$s(x) = \sec(\varphi_e' - \alpha + \beta) \cdot$$

$$\exp \left[- \int_a^x \tan(\varphi_e' - \alpha + \beta) \frac{d\beta}{d\zeta} d\zeta \right] \quad (21)$$

$$G_m = P_w - PE_b \quad (22)$$

$$E_b = \exp \left[- \int_a^b \tan(\varphi_e' - \alpha + \beta) \frac{d\beta}{d\zeta} d\zeta \right] \quad (23)$$

$$t(x) = \int_a^x (\sin \beta - \cos \beta \tan \alpha) \cdot$$

$$\exp \left[\int_a^\zeta \tan(\varphi_e' - \alpha + \beta) \frac{d\beta}{d\zeta} d\zeta \right] d\zeta \quad (24)$$

$$M_m = P_w h_w - P [h \cos \delta + t(b) E_b] + \int_a^b \eta \frac{dW}{dx} h_t dx \quad (25)$$

上式推导的详细过程可参考文献[9, 10]。

3.3 数值分析方法

3.3.1 解边坡稳定安全系数和主动土压力的步骤

(1) 求解安全系数

在边坡稳定分析领域, 式(19)~(25)中的土压力 P 为零, 因而简化为

$$G_n(F, \lambda) = \int_a^b p(x) s(x) dx - P_w = 0 \quad (26)$$

$$M_n(F, \lambda) = \int_a^b p(x) s(x) t(x) dx - P_w h_w - \int_a^b \eta \frac{dW}{dx} h_t dx = 0 \quad (27)$$

式(26)和(27)中包含有 F 和 λ 两个未知量。

(2) 求解主动土压力

在土压力领域, 式(19)和(20)中包含的 F 为已知量, 其值为 1。可以通过式(19)直接求解 P , 再代入式(20)得到一个只包括一个未知量 λ 的方程式^[9]:

$$M_n(\lambda) = M_b - P_w h_w + (P_w - G_b) \left[\frac{h \cos \delta}{E(b)} + t(b) \right] - \int_a^b \eta \frac{dW}{dx} h_t dx = 0 \quad (28)$$

其中

$$G_b = \int_a^b p(x) s(x) dx \quad (29)$$

$$M_b = \int_a^b p(x) s(x) t(x) dx \quad (30)$$

无论是通过式(26)和(27)求解 F 和 λ , 还是通过式(28)求解 λ , 都可以采用牛顿-勒普生迭代法。实践证明其收敛性很好。

3.3.2 算例

(1) 边坡稳定分析算例

图 3 算例为澳大利亚 ACAD 协会考核稳定分析程序的一个考题^[7]。一大批程序对此例进行了分析。滑裂面 1 为使用 Spencer 法获得的临界滑裂面, 相应安全系数为 1.366。临界滑裂面 2 相应圆弧滑裂面和 Bishop 法, 算得的最小安全系数为 1.378。对同一弧使用 Spencer 法的安全系数为 1.383。表 1 为相应这一情况的数值计算迭代过程, 可见, 其收敛速度极快。

表 1 数值迭代过程

迭代步	G_n	M_n	F	λ
1	1.30135×10^1	1.70287×10^2	1.38169	0.464641
2	5.59605×10^{-1}	1.10098×10^1	1.38313	0.382391
3	3.20386×10^{-3}	1.18866×10^{-2}	1.38264	0.376858

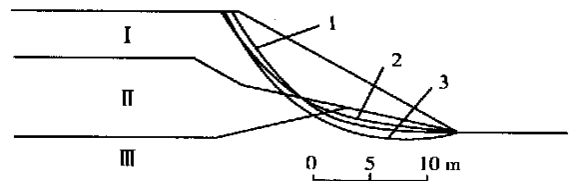


图 3 澳大利亚 ACAD 标准问题垂直条分法计算成果比较
1-任意形状, Spencer 法 2-圆弧, Bishop 法 3-斜条分法上限解

图 3 澳大利亚 ACAD 标准问题垂直条分法计算成果比较

Fig. 3 An example of the method of vertical slices for the test problem in ACAD computer program review

(2) 土压力算例

在前言中已经讨论过, 作用于不同支挡结构的土压力的分布形状不同, 导致合力作用点的位置不同, 其主动土压力也不同。如果引入力矩平衡条件, 则有可能实现不同支挡结构的土压力的分析和计算。在执行垂直条分法时, 可以通过输入不同的 $\kappa = h/H$ 值来计入这一影响。这一方法, 可以理解为对 Terzaghi 和 Peck 早期提出的如图 1 所示的简化法的一种改善。

现在通过如图 4 所示墙高为 12 m 的算例来说明求解主动土压力的步骤^[10]。此例两端点的 β 值均设为零, 采用图 2(b) 第 2 种侧向力的假定。研究 $h = 4, 6, 8 \text{ m}$ 三种情况, 相应 $\kappa = 1/3, 1/2, 2/3$ 。输入的初始滑裂面编号为 0。对于此三种情况, 获得的临界滑裂面分别为 1, 2, 3, 相应的主动土压力 P_a (即 $x = a$ 处的 P 值) 分别为 387.3, 599.07, 462.76 kN。分析这些计算成果, 可得到如下认识:

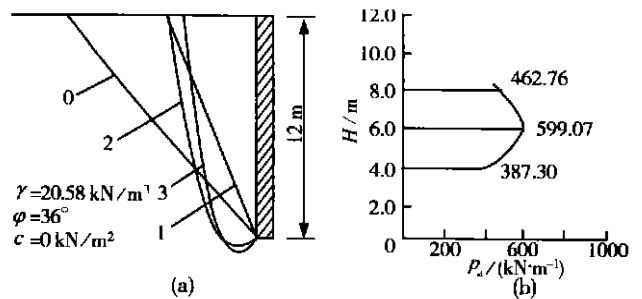


图 4 土压力与作用点位置关系分析算例

Fig. 4 An example investigating the relationship between the active earth pressure and the point of application

a) 在 $\kappa = 1/3$ 时, 临界滑裂面回归为一条直线 (曲线 1), 与水平面夹角恰好为 $45^\circ + \varphi/2 (= 63^\circ)$, 其土压力数值也与 Rankine 土压力的理论值一致。说明, 当作用点为下三分点时, 本文介绍条分法可以回归为重力式挡土墙的经典理论。

b) 当 $\kappa = 1/2$ 时, 主动土压力 P_a 变大。相应的临界滑裂面为曲线型 (曲线 2)。由此可见, 诸如支撑、锚拉和悬臂这一类的支挡式结构, 其土压力通常比重力式挡土墙的相应值大。Casagrande^[5] 曾建议使用静止

土压力系数 K_0 , 经验公式为

$$K_0 = 1 - \sin \varphi \quad (31)$$

对于本例, $K_0 = 0.41$, 故在 $\kappa = 1/2$ 情况下 $P_a = 610.80 \text{ kN}$, 这一数值和使用本文介绍的条分法解 599.07 kN 接近。

$c) P_a$ 在 $\kappa = 1/2$ 时, 附近获得极大值。从实用和安全观点来看, 工程师可以将 P_a 的极大值作为柔性支挡结构主动土压力的解。

3.3.3 有关垂直条分法基本理论的讨论

本节介绍的垂直条分法理论体系和数值分析方法反映了笔者作为访问学者(1979~1981年)在 Morgenstem 指导下^[9] 和作为博士研究生(1989~1991年)在黄文熙指导下^[11] 所作的研究工作的主要成果。其要点如下:

(1)应用严格的解析方法, 获得了由 Morgenstem 和 Price^[13] 提出的任意形式滑裂面的稳定分析微分方程的解析解, 即式(19)和式(20)。这一解答适用于任意形状滑裂面, 全面地满足了力和力矩平衡条件。这一解答同时也是一个通用的形式解, 引入相应的简化条件下, 可以回归为在边坡稳定分析中已广泛使用的 Bishop 法、滑楔法和 Spencer 法。

(2)提出了应用牛顿-勒普生法迭代时所需的各项导数的计算公式^[11], 从而保证了数值分析具有极强的收敛特性。

(3)提出了对假定的 $\beta(x)$ 在两端点必须满足的边界条件, 以保证剪应力成对的原理不受破坏。这一命题限制了对土条侧向力假定的任意性。

(4)通过深入的探讨和算例分析, 进一步确认在合理性条件式(13)至(15)的限制下, 不同的假定函数 $f_0(x)$ 和 $f(x)$ 不会导致安全系数的重大差别, 从而从理论上弥补了条分法引入假定的缺陷。并进一步说明这些本来差别不大的安全系数均低于理论上的真实解, 从而将垂直条分法纳入下限领域。

以上4个方面的工作, 使垂直条分法形成了一个具有严格理论内涵的数值分析方法。鉴于第(1)至第(3)条有关成果均已在以往的文献中有过详细的讨论, 本节仅简要讨论垂直条分法的下限背景。

从本节的内容可以看到, 在滑裂面固定时, 传统的极限平衡方法所获得的是一个静力许可的解答, 在式(13)至式(15)的约束下, 其解答应视为满足第2节讨论的下限定理的框架, 相应的是小于真实解的、留有余地的安全系数。上节计算土压力的例子说明, 如果严格遵循加荷的途径来分析结构的安全度, 那么临界破坏模式相应的目标函数应为最大, 而不是最小, 这和下

限定定理是一致的。尽管, 对这个问题在理论上还有不同的认识(如 W.F. Chen^[2]), 对于工程师来说至关重要的是, 了解他们经常使用的“Bishop”、“Morgenstem-Price”法等总在提供一个偏安全的解。

图5所示为一重量承受垂直荷载的边坡。材料特性为 $\varphi = 30^\circ$, $c = 88.2 \text{ kPa}$ 。根据滑移线理论可得极限荷载 $q = 1092.1 \text{ kPa}$ 。相应理论解, 土条侧向力倾角的分布图形应如图5(b)所示。图6和表2分别给出相应这一理论侧向力倾角的分布图形和图2(b)所示土条侧向力假定1和2的临界滑裂面。相应这三种情况的临界滑裂面都是使用计算机自动搜索获得的。垂直条分法得到的临界滑裂面虽然与理论解在形状上稍有出入, 但安全系数均小于理论值1。在文献[11]中笔者还介绍了其它几个具有闭合解的例题, 显示了相同的规律。

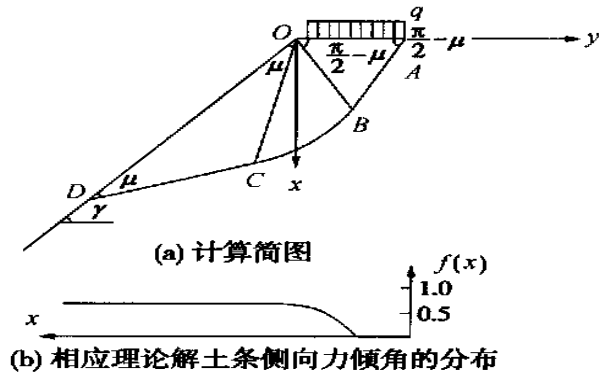


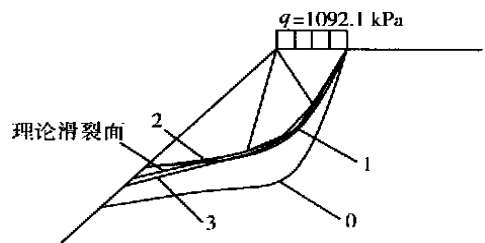
图5 无重量承受垂直荷载的边坡

Fig. 5 A weightless slope with vertical surcharge

表2 垂直条分法的下限背景解释一例

Table 2 An example discussing the lower bound nature of method of vertical slices

$f_0(x)$ 和 $f(x)$	初始滑裂面		临界滑裂面	
	编号	F_0	编号	F_0
理论(图5(b))	0	1.110	3	0.990
假定1	0	1.015	1	0.991
假定2	0	0.987	2	0.957



0-初始滑裂面 1-假定1, $F = 0.991$ 2-假定2, $F = 0.957$ 3-使用理论滑裂面和理论侧向力测定, 即图5(b)图形, $F = 0.990$

图6 对图5所示例, 采用不同的侧向力假定获得的安全系数和临界滑裂面

Fig. 6 The factors of safety and critical slip surfaces using various interslice force assumptions for the example shown in Fig. 5

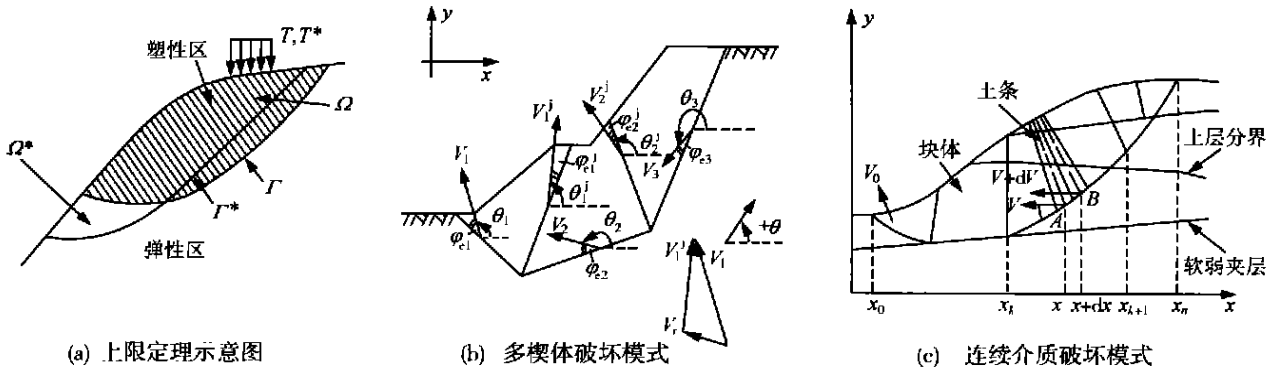


图 7 边坡稳定分析的塑性力学上限解

Fig. 7 The upper bound solution in plasticity for slope stability evaluation

4 土体稳定分析的上限解——斜条分法

4.1 理论框架

对于一个处于极限状态的边坡(图 7(a)), 假定在土体里存在一个塑性区 Ω^* , 塑性区里各点均达到屈服, 在这一塑性区和边界上如果由于某一外荷载增量导致一个塑性应变 ϵ_{ij}^* , 那么可以通过类似式(4)这样的虚功原理的表达式求解相应这一塑性变形模式的外荷载 T^* , 即

$$\int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^* \cdot \epsilon_{ij}^* dv + \int_{\Gamma^*} dD_s^* = WW^* + T^* V^* \quad (32)$$

上限定理指出, 相应真实塑性区 Ω 的外荷 T 一定比 T^* 小或相等。因此, 极限分析上限解就是在许多可能的滑动机构 Ω 中寻找一个使 T^* 最小的临界滑动机构。式中 V^* 是外荷载增量引起的塑性位移增量。这个位移率通常称为塑性速度。 W 是塑性区的体积力。式(32)的左边两项分别是产生于破坏体 Ω^* 内和沿滑裂面 Γ^* 的内部耗能。

用 D 表示作用在土条底面或侧面的内能耗散。如果材料遵守摩尔-库仑破坏准则和相关联的流动法则, 则可确认速度 V 与滑面夹角为 $\varphi_c^{[2]}$ 。因此单位面积内能耗散可用下式表示:

$$dD = (c_e^j \cos \varphi_e - u \sin \varphi_e^j) V \quad (33)$$

作为由图 7(a)所代表的上限解命题的一种简化, 斜条分法将滑动土体分成若干具有倾斜侧面的土条(图 7(b)), 假定沿条块底面和侧面土体均达到了极限平衡。而每一条块本身则视为一个刚体。在某一外力增量的作用下, 每个条块将产生一个塑性变形增量 V_i^* , 此时, 式(32)可简化为

$$\sum_{k=1}^{n-1} D_{ik}^j + \sum_{i=1}^n \Delta D_{ai}^s = WW^* + T^* V^* \quad (34)$$

分别用上标 s 和 j 表达底面和界面的内能耗散。土条

被划分为 n 个土条, 包括 $n-1$ 个侧面。

由于速度 V 与滑动界面的夹角必须为 φ_c , 知道第一个条块的速度 V_1 后, 即可求得第二个条块的速度 V_2 和第一个条块相对于第二个条块的速度 V_1^j 。依此类推, 任意一条块的速度 V 和 V_j 可表达成第一个条块的速度 V_1 的线性函数。这样 V 不再是未知数, 我们将通过式(34)求解一个 F 值。

4.2 求解上限解的基本方程式

如前所述, 每个条块的速度 V 与滑面夹角为 φ_c , 与右边相邻块体的相对速度 V_j , 与该两块体的交界面的夹角为 φ_{ej} 。内能耗散发生于该楔块的底面和楔块间的界面, 在刚体内为零。位移协调条件要求相邻条块的移动不至于导致它们重叠或分离。也就是说, 速度多边形要闭合。根据这个条件, 右侧条块的速度 V_r 和左、右条块间的界面的相对速度 V_j 可以通过左侧条块的速度 V_l 确定(参见图 7(b)右下侧的速度多边形):

$$V_r = V_l \frac{\sin(\theta_l - \theta_j)}{\sin(\theta_r - \theta_j)} \quad (35)$$

$$V_j = V_l \frac{\sin(\theta_r - \theta_l)}{\sin(\theta_r - \theta_j)} \quad (36)$$

式中 θ 为速度与正 x 轴的夹角。知道第一个条块的速度 V_1 后, 借助式(35), (36), 即可求得 V_2 。依此类推, 任意一条块的速度 V 和 V_j 可表达成第一个条块的速度 V_1 的线性函数:

$$V = kV_1 \quad (37)$$

其中

$$k = \prod_{i=1}^k \frac{\sin(\alpha_i^l - \varphi_{ei}^l - \theta_j^l)}{\sin(\alpha_i^r - \varphi_{ei}^r - \theta_j^l)} \quad (38)$$

式中 α 为土条底的倾角。为了保证按式(35)和(36)解得的速度值为正值, 还需注意相邻条块间滑动方向存在两种可能性, 详见文献[7]。

如果采用图 7(b)的模式, 势必需要将土体分成大

量的楔体,才能保证计算精度。而这将增加数值分析的自由度,从而增加用最优化方法计算临界滑动模式的难度。Donald和Chen^[7]提出了将图7(b)多楔体模式优化为图7(c)这样一种分段连续多块体模式。即滑裂面仅用若干个控制点来构筑,相邻控制点之间底滑面可以用曲线也可以是直线相连。各分段块体(如图7(c)中 x_k, x_{k+1} 段)可按线性内插原则进一步细分为若干条块。当条块宽度 Δx 很小时,分别将 V 和 $V+dV$ 代替式(35)中的 V_l 和 V_r ,可得计算任一条块的 V 的微分方程:

$$-\frac{dV}{V} = \cot(\alpha - \varphi_e' - \theta_j) \frac{d\alpha}{dx} dx \quad (39)$$

积分后可得

$$V = E(x)V_0 \quad (40)$$

其中

$$E(x) = k \exp\left[-\int_{x_0}^x \cot(\alpha - \varphi_e' - \theta_j) \frac{d\alpha}{d\xi} d\xi\right] \quad (41)$$

V_0 为左端点的速度。滑裂面上有若干个不连续点,在这些点 α 或 φ_e' 发生突变。上标 l 和 r 代表不连续点左和右的物理量。计算从第一个界面开始,到分隔第 k 和第 $k+1$ 个块体的第 k 个界面终止。式(40)说明,滑裂面上处于第 k 个 φ_e' 或 α 不连续点右侧的任一点的速度可以直接通过在 (x_0, x) 区间的积分求得,表达成左端点($x=x_0$ 处)的速度 V_0 的函数。滑裂面上 α 和 φ_e' 的突变影响在系数 k 中得到了考虑。

各条块侧面的相对速度在 α 或 φ_e' 发生突变处仍按式(36)确定。在滑面连续处则可表达为

$$V_j = -\csc(\alpha - \varphi_e' - \theta_j) E(x) V_0 d\alpha \quad (42)$$

对某一多块体破坏模式,将通过式(40)和(42)获得的速度场代入式(33)再代入式(32),由于左、右式都为 V_0 的线性表达式,故 V_0 被消去,最终获得以下计算安全系数或加载系数的公式。

定义:

$$G = \int_{x_0}^{x_n} [(c_e \cos \varphi_e' - u \sin \varphi_e') \sec \alpha - (\frac{dT_x}{dx} + \frac{dT_y}{dx}) \sin(\alpha - \varphi_e')] E(x) dx - (\eta' \frac{dW}{dx} + \frac{dT_x}{dx}) \cos(\alpha - \varphi_e') E(x) dx - \int_{x_0}^{x_n} (c_e^j \cos \varphi_e^j - u^j \sin \varphi_e^j) L \csc(\alpha' - \varphi_e^j - \theta_j) \frac{d\alpha}{dx} E(x) dx - \sum_{k=1}^{n-1} (c_e^k \cos \varphi_e^k - u^k \sin \varphi_e^k) L_k \csc(\alpha' - \varphi_e^k - \theta_j) \sin(\Delta\alpha - \Delta\varphi_e^k) E^1(x_k) \quad (43)$$

$$G_t = \int_{x_0}^{x_n} [\frac{dT_y}{dx} \sin(\alpha - \varphi_e') + \frac{dT_x}{dx} \cos(\alpha - \varphi_e')] E(x) dx \quad (44)$$

$$G_b = \int_{x_0}^{x_n} \frac{dW}{dx} \cos(\alpha - \varphi_e') E(x) dx \quad (45)$$

式中, T_x, T_y 为 T_0 在 x, y 方向的分量, η' 为水平地震加速度系数。 L 为土条侧面的长度,求和项 \sum 为滑面上 α 或 φ_e' 发生突变点的附加增值。

对于2.2节讨论的方案1,表面荷载的加载系数 η_t 通过下式计算:

$$\eta = \eta_t = \frac{G}{G_t} \quad (46)$$

对方案2,水平地震力的加载系数 η_b 由下式计算:

$$\eta = \eta_b = \frac{G}{G_b} \quad (47)$$

对于方案3,安全系数隐含于 c_e' 和 φ_e' 中,并满足

$$G = 0 \quad (48)$$

相应式(46)和式(47), c_e' 和 φ_e' 实际上为 c' 和 φ' ,

即理解为 $F=1$ 。

在计算安全系数时,通常作法是假定一系列 F 值,按式(10),(11)计算 c_e' 和 φ_e' 。然后按式(47)算得一系列 η_b ,用迭代或内插的方法求得相应于 η_b 为零的 F 值。和垂直条分法一样,应试算不同的滑动模式,找到安全系数最小值。但是,在上限解算题时,条块侧面的倾角 δ 也存在一个临界值,和滑裂面的位置一样,属于自变量,需通过最优化方法予以确定。

4.3 边坡稳定分析的上限解

大量算例表明,应用上限解求解边坡稳定问题,获得的成果和垂直条分方法十分接近。对图3算例,用传统方法分析的成果已在3.2节介绍,曲线3为本文叙述的斜分条的上限解的答案。相应安全系数为1.415。图8为计算最终获得的临界斜条分模式以及各条块的速度场。图中虚线为按计算所得速度场变形后的边坡。可见,各个方法提供的临界滑裂面相差不远,安全系数上、下限偏差在3%左右。

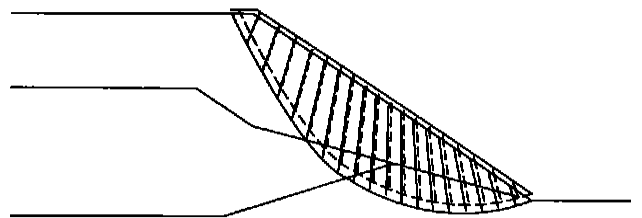


图8 应用上限解求解图3所示边坡稳定问题获得的临界滑动模式

Fig. 8 The critical failure mode obtained for the example shown in Fig. 3 using the upper bound method

4.4 地基承载力的上限解

(1)与滑移线法比较

上限解和滑移线法属同一理论体系。50年代,

表 3 图 9 所示算例对式 (43) ~ (49) 中各项的积分

Table 3 The integrals for various terms involved in Eq. (43) to (49) for the problem shown in Fig. 5

滑裂面段	$E(x)$	$\int_l (c \cos \varphi - u \sin \varphi) \times \sec \alpha E(x) dx$	$\int_l \frac{dT_v}{dx} \sin(\alpha - \varphi) E(x) dx$	$\int_l (c' \cos \varphi' - u' \sin \varphi') \times L \csc(\alpha - \varphi - \theta_j) \frac{d\alpha}{dx} E(x) dx$
AB	l	$L_c x \cos \varphi$	0	0
BC	$\exp[-(\alpha - \alpha_b) \tan \varphi]$	$\frac{1}{2} dL_c \cot \varphi (s - s^{-1})$	0	$\frac{1}{2} dL_c \cot \varphi (s - s^{-1})$
CD	s^{-1}	$L_c s^{-1} c \cos \varphi$	$q L_c (1 - \sin \varphi) s^{-1}$	0

注: $s = \exp[(\frac{\pi}{2} - \chi) \tan \varphi]$

苏苏联学者索科洛夫斯基^[14]曾使用滑移线法获得一系列具有简单体形的均匀介质问题的理论解。这一理论通常在破坏土体内构筑两组代表剪切破坏的滑移线, 这两组线恰好构成了本文介绍的斜条分法中的滑裂面和倾斜条块界面, 因此, 可以发现, 上限解可以和滑移线理论解得到一致的解答。下面我们通过已在 3.3.3 节使用过的算例(图 5), 说明式(48)可以回归为索科洛夫斯基提供的理论解。

对于图 9 所示的例子, 索科洛夫斯基给出的临界垂直荷载 q 的计算公式为

$$q = c \cot \varphi \left\{ \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp[(\pi - 2\chi) \tan \varphi] - 1 \right\} \quad (49)$$

式中 χ 为边坡斜面相对水平线的夹角。相应的临界滑裂面由 AB, BC 和 CD 三段组成, AB, CD 为直线, 分别与边坡线和坡顶线夹角 μ , 即

$$\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (50)$$

BC 为一对数螺旋线, 其左右边界线 BO 和 CO 分别与边坡线和 y 轴线夹角 μ 。

当边坡处于极限状态时, 安全系数为 1。对 AB, BC 和 CD 段分别进行积分, 式(43)至式(45)中各项如表 3 所示, 导致式(48)最终变成

$$q(1 - \sin \varphi) = (s^2 + 1)c \cos \varphi + (s^2 - 1)c \cot \varphi \quad (51)$$

不难证明, 式(51)与索科洛夫斯基的闭合解式(49)是等同的。这就说明, 本文提出的上限定理的命题不仅可以通过数值分析的成果验证(将在下节讨论), 而且可以通过解析解获得印证。

(2)地基承载力公式中的修正系数的验证

由于地基承载力的 Prandtl 解是在滑移线理论基础上建立起来的。因此, 上限解和滑移线理论的一致性导致了一个地基承载力的数值方法的诞生, 这在有关文献中已作了详细介绍^[7, 15]。这些内容说明, 在目前常用的计算地基承载力的公式中对地基埋深、容重、荷载偏心等复杂情况引入一系列修正系数的做法可以用更为方便、精确的数值方法来代替。反过来, 在目前

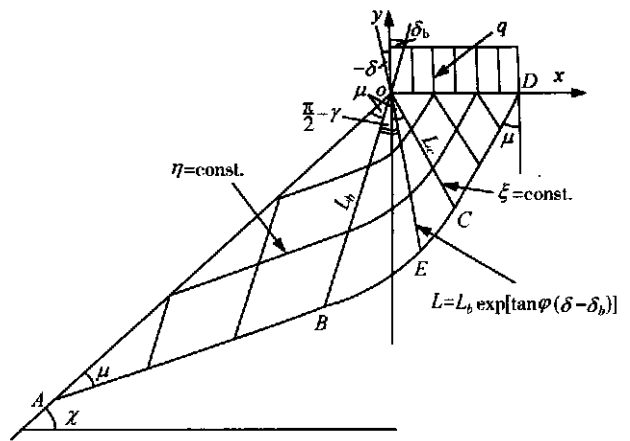


图 9 具有垂直荷载的闭合解算例

Fig. 9 The closed-form solution to a problem with vertical surcharge
工程界尚习惯于继续使用这些经验公式时, 我们也可以数值方法来检验各家提出的经验修正系数的可行性。

常用的计算地基承载力的公式如下:

$$q_u = cN_c + qN_q + 0.5\gamma BN_\gamma \quad (52)$$

式中 q_u 为地基承载力; q 为两侧地面的垂直荷载; B 为地基宽度; γ 为地基土的容重。

上述公式存在两个经验成份需要予以研究:

a) 式中 N_c 和 N_q 分别是在其它因素为零, q 和强度指标 c 单独作用时从滑移线理论推导出来的理论解, 即

$$N_c = (N_q - 1) \cot \varphi \quad (53)$$

$$N_q = e^{\pi \tan \varphi} \tan^2(45^\circ + \varphi/2) \quad (54)$$

但是, 尚无 γ 不为零情况下的理论解。因此, 学者们对 N_γ 提出了以下各种经验公式^[16-18]:

$$N_\gamma = \frac{\tan \varphi}{2} \left(\frac{K_{p\gamma}}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) \quad (\text{Terzaghi}) \quad (55)$$

$$N_\gamma = (N_q - 1) \tan(1.4\varphi) \quad (\text{Meyerhof}) \quad (56)$$

$$N_\gamma = 2(N_q + 1) \tan \varphi \quad (\text{Vesic}) \quad (57)$$

$$N_\gamma \approx (N_q - 1) \tan(1.5\varphi) \quad (\text{Bolton \& Lau}) \quad (58)$$

需要通过其他途径验证对 N_γ 进行修正的经验公式的合理性。

表4 应用数值解计算 N_c , N_q 和 N_γ 并与理论和经验解比较

Table 4 N_c , N_q and N_γ obtained by the numerical approaches, compared with the empirical methods

图 11(a), N_c		图 11(b), N_q		图 11(c), N_γ				
上限解	理论式(2.24)	上限解	理论式(2.25)	上限解	Tezaghi	Mayerhoff	Vesic	Bolton & Lau
30.2	30.13	18.5	18.4	24.21	19.7	15.67	22.4	23.6

表5 考察纯数值分析和纯经验法的差别

Table 5 The difference between the pure numerical and empirical approaches

上限解和反算参数				经验参数和相应极限荷载				$q_u - q_{super}$
N_c	N_q	N_γ	q_u	N_c	N_q	N_γ	q_{super} 式(52)	q_u
31.48	18.64	26.1	732.36	30.1	18.4	23.6	697.7	5.6%

b) 计算系数 N_c , N_q 和 N_γ 的上述公式是在与本项有关的参数不为零, 无关的参数为零时导出的。当 c , φ 和 γ 均不为零时, 地基承载力能否按式(52)进行线性迭加, 尚需论证。如果从上限定理的框架来理解, 那么在 c , q , γ 单独作用时的临界滑动模式和迭加后的模式显然是不同的。因此, 至少从理论角度, 可以认为这一线性迭加是带有经验成份。

现在, 用本文介绍的稳定分析上限方法, 结合图 10 所示例子来考察这两个问题^[19]。取 $B=1\text{ m}$, $c=10\text{ kN/m}^2$, $\varphi=30^\circ$, $\gamma=18.0\text{ kN/m}^3$, $q=10\text{ kN/m}^2$, 对式(48)进行适当的改造, 相应图 10 的多块体失稳模式, 可得(式中的符号参见图 10)

$$N_c^* = \frac{\sum_{i=1}^n (s_i V_i \cos \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (h_i V_i \cos \varphi_i)}{BV_n \sin(\alpha_n - \varphi_n)} \quad (59)$$

$$N_q^* = \frac{-\sum_{i=1}^{n-1} l_i \sin(\alpha_i - \varphi_i) V_i}{BV_n \sin(\alpha_n - \varphi_n)} \quad (60)$$

$$N_\gamma^* = \frac{-\sum_{i=1}^n (W_i \sin(\alpha_i - \varphi_i) V_i)}{V_n \sin(\alpha_n - \varphi_n) 0.5 \gamma} \quad (61)$$

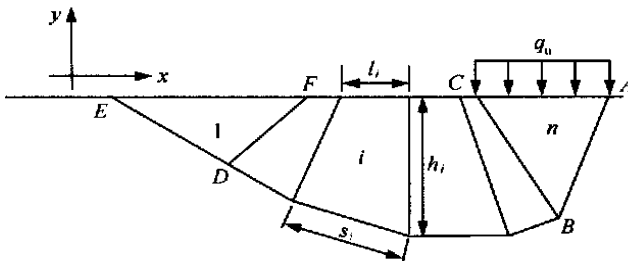
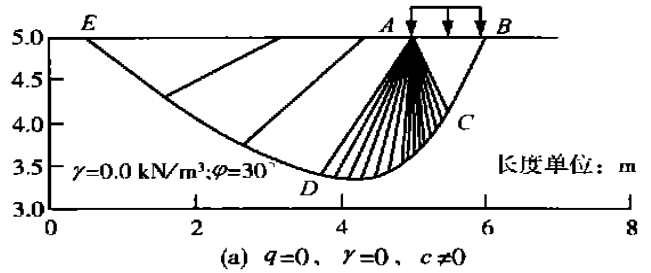


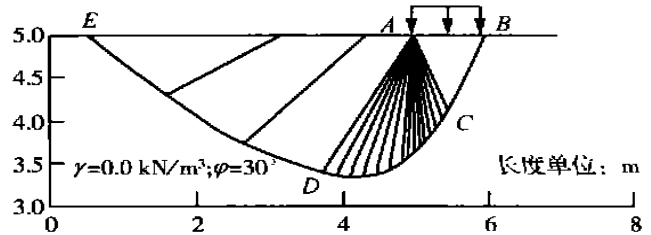
图 10 考察承载力公式经验因素的计算简图

Fig. 10 An example investigating the empirical aspects involved in the bearing capacity equations

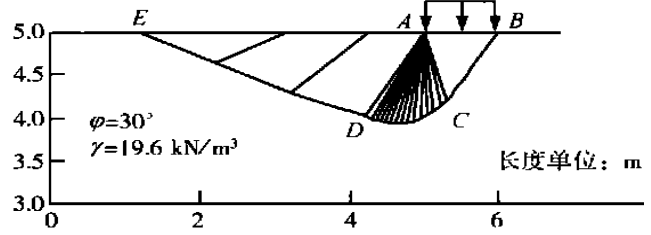
我们的考察方案是, 对于设定的条件, 进行上限解计算, 获得其临界滑动模式和相应的极限荷载 q_u 。并按照式(59)~(61)算得的 N_c^* , N_q^* , N_γ^* , 将其与按式(52)获得的 q_u 以及与其相关的 N_c , N_q 和 N_γ 进行比较。图 11 分别示出了(a) $q=0, \gamma=0, c \neq 0$; (b) $c=0,$



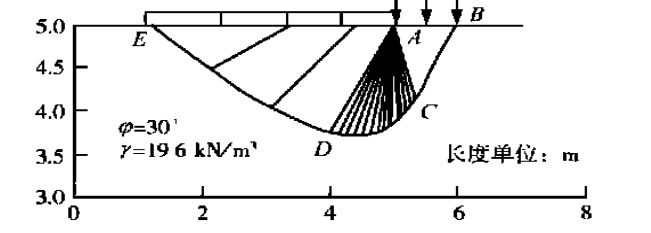
(a) $q=0, \gamma=0, c \neq 0$



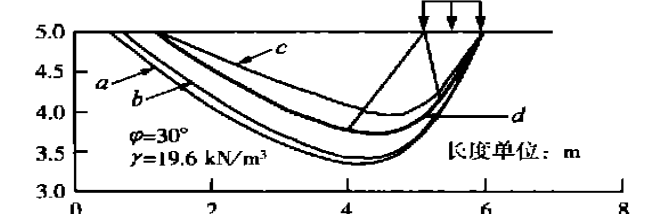
(b) $c=0, \gamma=0, q \neq 0$



(c) $c=0, q=0, \gamma \neq 0$



(d) $c \neq 0, q \neq 0, \gamma \neq 0$



(e) 比较各种情况的临界滑裂面

图 11 各种情况下考察承载力公式经验因素的临界滑动模式
Fig. 11 The critical failure modes for the example shown in Fig. 10

$\gamma=0$, $q \neq 0$ 和 (c) $c=0$, $q=0$, $\gamma \neq 0$ 三种情况下的临界滑移模式。相应(a), (b), (c)三种情况分别获得的 N_c , N_q 和 N_γ , 其结果列于表4。可看出, 本文介绍的上限解数值方法获得的 N_c 和 N_q 和理论解一致, 从图11(a), (b)也可以看出, 上限解给出的临界滑移模式和滑移线法的解答一致, 每一个临界斜分条模式最终都有一部分收敛于荷载端部的扇形区, 与滑移线理论吻合。这一算例再一次证明了上限解的精确性。各个经验公式计算的 N_γ 与上限解有一定的出入, 以 Mayehoff 的解误差最大。文献[15]曾得出过类似的结论。

下面考察地基承载力计算公式(52)所采用的线性迭加形式的可行性。如果 c , q 和 γ 均不为零, 进行承载力的计算, 那么, 将获得如图11(d)所示的临界滑裂面, 相应的极限荷载为 732.36 kN/m^2 。相应这一临界滑动模式, 用式(64)~(66)反算 N_c^* , N_q^* 和 N_γ^* , 计算值用 N_c , N_q , N_γ 表示, 列于表5。可见 N_c , N_q 与 N_c^* , N_q^* 的数值差别不大, 但 N_γ 的数值从单独作用时的24.21增加到了26.11。说明, 式(52)所采用的线性迭加导致的主要误差仍发生在 N_γ 上面。对于本例, 纯数值分析和纯经验法两者的误差为5.6%。这里纯经验法的 N_γ 取 Bolton 和 Lau 的经验公式比较, 如使用其它经验公式误差还要大一些。图11(e)所示这几种情况相应的临界滑裂面。可见实际的滑裂面和任一单一因子的临界滑裂面都不同。经过大量算例的考核, 可以得出这样的结论: 地基承载力计算公式(52)的误差主要来自对 N_γ 的各家经验公式本身的误差, 采用的线性迭加也带来一些误差, 总误差值约为(5~10)%。考虑到地基承载力的允许安全系数一般都超过2, 同时经验公式提供的承载力通常偏小, 故这些经验公式都是可行的。

5 结 语

从本文介绍的内容可以发现, 随着近代数值分析技术的进展, 土力学中的土压力、地基承载力和边坡稳定分析三个经典领域早期所包括的诸多假定和经验成份均可以通过更为严格分析步骤得以克服, 在极限分析理论框架下形成一个统一的体系。但是, 随之而出现在的问题是, 这一分析步骤必须通过计算机程序才能得以实现。为此, 笔者在网上公布了实现第3, 4节介绍的计算过程的源程序 S. FOR 和 E. FOR, 同时还提供了边坡稳定分析垂直条分法 STAB 和斜条分法 EMU 中的普及版以及相应的使用手册。网址为: [www. geoeng. iwhr. com](http://www.geoeng.iwhr.com)。使用这两个程序, 读者可以进行本章介绍的方法的土体稳定分析的工作。

参考文献:

- [1] Janbu K N. Slope Stability Computation, Embankment Dam Engineering[M]. York: John Wiley and Sons, 1973.
- [2] Chen W F. Limit Analysis and Soil Plasticity[M]. York: Elsevier Scientific Publishing Co, 1975.
- [3] 黄文熙. 挡土墙的土压力研究, 水工建设中的结构力学与岩土力学问题[M]. 北京: 水利电力出版社, 1995. 219—237.
- [4] Terzaghi K, Peck R B. Soil Mechanics in Engineering Practice [M]. York: John Wiley and Sons, 1967.
- [5] Casagrande L. Comments on conventional design of retaining structures[J]. Journal of Geotechnical Engineering ASCE, 1973, 121(9): 629—635.
- [6] Peck R. Fifty years' of lateral earth pressure[A]. Design and Performance of Earth Retaining Structures, Proc of Conf[C]. Ithaca York: Cornell University, 1990. 8021. (ASCE Geotechnical Special Publication, No 25).
- [7] Donald I, Chen Z Y. Slope stability analysis by an upper bound plasticity method[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1997, 34: 853—862.
- [8] Sarma K S. Stability analysis of embankments and slopes[J]. J Geotech ASCE, 1979, 105(GT 12): 511—524.
- [9] Chen Z Y, Morgenstem N R. Extensions to the generalized method of slices for stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1983, 20(1): 104—109.
- [10] Chen Z Y, Li S M. Evaluation of active earth pressure by the generalized method of slices[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1998, 35(4): 591—599.
- [11] 陈祖煜. 边坡稳定分析——极限平衡法的改进和应用[D]. 北京: 清华大学, 1991.
- [12] Donald I, Giam P. The ACAD slope stability analysis program review[A]. Proc of the 6th International Symposium on Landslides; Vol 3[C]. 1665—1670.
- [13] Morgenstem N R, Price V. The analysis of the stability of general slip surface[J]. Geotechnique, 1965, 15(1): 9—93.
- [14] Sokolowski V V. Statics of soil media[M]. Translated by Jones D H, Scholfield A. London, 1960.
- [15] 陈祖煜, 高 锋. 地基承载力的数值分析[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(5): 1—8.
- [16] Meyerhof G G. The ultimate bearing capacity of foundations[J]. Geotechnique, 1951, 2: 301—331.
- [17] Vesic A S. Analysis of ultimate loads of shallow foundations [J]. JSMFD, ASCE, 1973, 99(1): 45—73.
- [18] Bolton M D, Lau C K. Vertical bearing capacity factors for circular and strip footings on Mohr—Coulomb soil [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1993, 30(4): 1024—1033.
- [19] Wang Y J, Yin J H, Chen Z Y. Calculation of bearing capacity of a strip footing using an upper bound method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2001, 25: 841—851.