

建筑物抗滑稳定分析中“潘家铮最大最小原理”的证明*

陈祖煜

清华大学 水利水电工程系, 北京 100084

文 摘 对滑坡和边坡稳定分析中的潘家铮原理的理论意义和证明作出理论阐述。潘氏原理指出: 1) 滑坡如能沿许多滑面滑动, 则失稳时, 它将沿抵抗力最小的一个滑面破坏(最小值原理)。2) 滑坡体的滑面肯定时, 则滑面上的反力(以及滑坡体内的内力)能自行调整, 以发挥最大的抗滑能力(最大值原理)。对潘氏原理的证明是建立在 Drucker 准则和 Sarma 的斜分条边坡稳定分析方法基础上的。证明中使用了虚功原理和塑性力学的上、下限定理。列举了算例说明使用潘氏原理可以获得和闭合解一致的计算成果。

关键词 滑坡; 土力学; 岩石力学; 塑性力学的上、下限定理

分类号 TV 223. 21; TV 223. 31

1 潘氏原理及其理论意义

在边坡、坝基和其它建筑物的抗滑稳定分析中, 极限平衡法是工程中普遍采用的方法。这一方法包含两个步骤:

- 1) 对不稳定岩体或土体内某一滑裂面, 根据静力平衡条件确定其抗滑稳定安全系数;
- 2) 在所有可能的滑裂面中, 重复上述步骤, 找出相应最小安全系数的临界滑裂面。

在极限平衡的理论体系中, 上述第一步骤在本质上是一个静不定的力学问题, 需要引入必要的假定, 使问题变得可解。潘家铮^[1]在详细分析了建筑物和地基抗滑稳定的各种方法后, 提出了以下两条原理, 试图弥补传统的分析方法在理论上的缺陷

- i) 滑坡如能沿许多滑面滑动, 则失稳时, 它将沿抵抗力最小的一个滑面破坏(最小值原理)
- ii) 滑坡体的滑面肯定时, 则滑面上的反力(以及滑坡体内的内力)能自行调整, 以发挥最大的抗滑

能力(最大值原理)

本文试图对潘氏原理的理论意义和证明作一阐述

为了说明潘氏原理的理论意义, 回顾一个简单的例题。图 1(a)示一个作用有垂直荷载 T 的无重量的均质边坡。将假定的滑坡体分成 4 个具有倾斜界面的块体, 那么如果按照潘氏最大值原理来确定滑面和滑坡体的内力, 显然, 应选择在滑面和界面上均达到极限平衡的那个内力体系, 即在滑面和界面上的法向力 N 和切向力 X 均满足下面的关系式

$$X = N \tan \phi + cL \quad (1)$$

式中 N 和 X 为作用在破坏面上的法向和切向反力, ϕ 和 c 为摩尔-库伦准则的强度指标。在满足式(1)的前提下, 本问题是静定可解的。在边坡稳定分析领域, Sarma 法^[2]就是按照这一思路求解的。将按这一方法确定的相应外荷 T^* 与实际荷载 T 的差值相对 T 的比值称为加载系数 Z 即

$$Z = \frac{T^* - T}{T}$$

在本例中, 如果设 $T = 111.437 \text{ kPa}$, $c = 98 \text{ kPa}$, $\phi = 30^\circ$, 则计算获得的 Z 为 0.274。根据潘氏最小值原理, 作为稳定分析的第二步, 本文作者应用数学规划的方法, 寻找一个使 Z 为最小的破坏机构, 得到了如图 1(b) 的破坏机构。其相应值为 $Z = 0.027$ 。对这个例题, 索科洛夫斯基曾经给出过理论解, 其模式如图 1(c) 所示。对本例所采用的强度指标和其它参数, 其极限荷载的理论解就是 111.437 kPa 。故理论解的 Z 应为零。可以发现对本例采用 4 个块体的解 $Z = 0.027$ 已和理论值非常接近, 误差为 2.7%, 其破坏模式也十分相似。事实上当条块数增加到 19 时, 即可采用这一方法得 $Z = 0.0097$, 其破坏模式和索科洛夫斯基解答完全一致。

通过这一简单的例子, 可以看到, 存在着一个十分简便的途径来确定结构破坏的极限荷载。如果潘

收稿日期: 1997-01-30

第一作者: 男, 1943年生, 高级工程师, 清华大学兼职教授, 现工作单位: 中国水利水电科学研究院

* 国家自然科学基金项目, 59493603

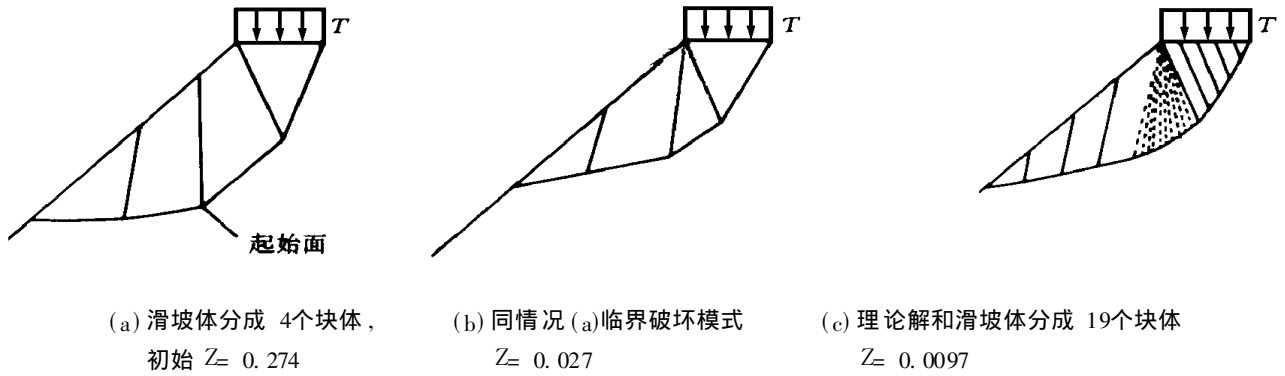


图1 边坡稳定分析示例

氏原理可以获得证明,那么传统的极限平衡分析方法可以和结构分析方法一样成为一个严格的理论分析体系。

2 潘家铮原理的理论基础

潘氏原理是建立在塑性力学极限分析的基础上的。本节简要地回顾这一理论框架,为证明该原理打下基础。

2.1 Drucker准则

作为塑性力学的基础,Drucker准则已在各类教科书中详细介绍。Drucker准则认为当材料从加载面的一点过渡到另一点时,应力增量在相应的塑性位移上做的功要大于或等于零,要求这样加载面必为凸面。这一准则将成为证明潘家铮原理的主要理论依据。

2.2 塑性力学上、下限定理

塑性力学的上、下限定理是建立在Drucker准则上的。下限定理指出,在所有静力许可的应力场中,真实的应力场相应的外荷载最大。上限定理则认为,对于某一塑性区 Ω^* 和相应的机动可能的应变场 ϵ_{ij}^* 和速度场 V^* ,按照下式计算获得的外荷载 T^* 将比一个包含有真实的塑性区K的临界荷载 T 大或与其相等。有

$$\int_K \epsilon_{ij}^* \bar{\sigma}_{ij} dK + \int_r dD_s^* = W V^* + T^* V^* \quad (2)$$

其中, $\bar{\sigma}_{ij}$ 为屈服面上的应力,它按照正交法则产生一个塑性应变 $\bar{\epsilon}_{ij}$, D 为塑性区边界上的内能耗散, W 为土体重。由于这里所述的位移都是相应某一荷载变化的增量,故称之为速度。

2.3 安全系数和加载系数

在衡量边坡的安全度时,塑性力学体系采用加载的方法。除了加载系数 η 的概念外,Sarma(1979)

建议每一个条块施加一个水平力 $\eta \Delta W$ (ΔW 为条块重量,在本文中,向量 ΔW 一律定义为指向滑坡的水平方向),使边坡处于极限平衡状态。传统的安全系数定义是这样一个系数 F ,当材料的参数被降低为 $C_c = c/F$, $\tan \phi_c = \tan \phi/F$ 时,边坡处于极限平衡状态。这三种方法确定的系数存在着唯一的,单调的联系,因此,本文的证明仅针对水平加载即Sarma这一作法。

2.4 虚功原理,静力法和能量法的等效性

从Drucker公设和上限定理的表达形式中可以看到,塑性力学的基本原理是通过功和能的平衡形式表达的,而潘家铮原理以静力平衡的形式表达,因此,需要建立静力平衡和功能平衡之间的等效关系。

考察由两个块体组成的滑体(见图2),设作用在左边块体上的体积力为 W_l ,作用在滑面上的法向力和切向力的合力为 P_l , P_l 的反作用力,即滑块作用在滑面上的力为 Q ,并设右边块体通过界面施加在本块体上的力为 G_r ,使边坡进入极限平衡状态的荷载力为 ZW_r ,显然有

$$W_l + P_l + G_l + ZW_l = 0 \quad (3)$$

同样,对右边块体有

$$W_r + P_r + G_r + ZW_r = 0 \quad (4)$$

遵照求解上述静力平衡的思路解题就是传统的极限平衡方法,具有代表性的方法,即Sarma法。

但是,还存在一种按虚功原理解题的方法。

假设左右块体分别有速度 V_l 和 V_r ,则,对每个块体,作用在上面的力沿位移作的功的总和为零

$$W_l V_l + P_l V_l + G_l V_l + ZW_l V_l = 0 \quad (5)$$

$$W_r V_r + P_r V_r + G_r V_r + ZW_r V_r = 0 \quad (6)$$

将式(5)和式(6)相加,并注意到以下关系式

$$G_l = -G_r \quad (7)$$

$$Q = -P_l \quad (8)$$

$$Q_i = -P_i \quad (9)$$

有

$$W_i V_i + W_r V_r + Z(W_i V_i + W_r V_r) = Q_i V_i + Q_r V_r + G_i V^i \quad (10)$$

其中 V^i 为左条块相对右条块的速度

$$V^i = V_i - V_r \quad (11)$$

式(10)左右端分别代表作用在滑体上的外力功总和和内能耗散总和。上述论证过程说明,按式(10)解题和按式(3)和(4)解题是等效的。而式(10)恰好就是式(2)在有限条块情况下的表达形式。这一联系为证明潘氏原理奠定了基础。作者曾详述采用这一方法的解题步骤^[3]。

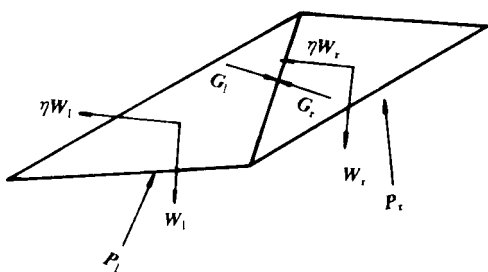


图 2 应用虚功原理证明能量法和静力法的等效性

3 最大最小原理的证明

3.1 最大最小原理的数学力学命题

在进行理论证明前,需要对上述潘家铮的原理表达成数学力学命题。对于如图 1 所示边坡的多块体破坏模式,定义:

1) 静力许可的内力系 G^o 和 P^o 。该内力系满足静力平衡要求,与加载系数为 Z 的外荷载平衡,同时,每一个 G^o 和 P^o 都不破坏滑面或界面上的屈服准则,即每一个 G^o 或 P^o 都在摩尔—库伦屈服面上或内。 Z 值可以通过静力平衡即求解式(3)、(4),也可以通过虚功原理,即求解式(10)获得。

2) 机动可能的位移场。这是相应某一多块体破坏机构的速度场 V^i , 界面上的相对速度 V_r^i 应按式(11)确定,相应的 T^i (或 Z) 按式(2)确定。

3) “真实的滑动机构”。如果某一边坡在加载系数为 Z 的外荷载作用下失稳,那么,这个滑动机构相应一个静力许可的内力系和机动可能的位移场,同时:

这个内力系的每一个 P 和 G 都达到了极限平衡状态,即每一个 P 或 G 都在摩尔—库伦屈服面上。

这个位移场是协调的,即同样应按式(11)来确定界面上的相对速度,同时,要满足塑性力学中关于确定塑性应变的原则,例如,每一块体的速度按关联流动法则原则确定。

“最大最小原理”的命题可以表达成这样的两个我们下面要证明的数学命题:

1) 相应于同一多块体滑动机构,与任何静力许可的内力系相对应的加载系数 Z 均小于或等于与真实的滑动机构相对应的加载系数 Z (最大原理)。

2) 如果存在一个多块体机动可能的滑动机构,它的加载系数 Z 是按照滑面和界面上的力均达到极限平衡的原则,也就是用本文阐述的推广的 Sarma 法确定的,那么, Z 一定大于或等于与真实的滑动机构相对应的加载系数 Z (最小原理)。

3.2 最大原理的证明

最大原理的证明和塑性力学下限定理的证明是一样的,兹述如下:

对于某一多块体滑动机构,假设存在一个静力许可的力系 W_i, P_i^o, ZW_i, G_i^o , ($i = 1, 2, \dots, n$, n 为条块总数),同时, Q_i^o 为 P_i^o 的反作用力,则有

$$P_i^o + G_{i,r}^o + G_{i,l}^o + ZW_i + W_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

其中 $G_{i,l}^o$ 和 $G_{i,r}^o$ 为左、右相邻条块作用在本条块上的力, ZW_i 即为 Sarma 的水平加载力。

对每一条块赋一协调的速度场 V_i , 则有

$$P_i^o V_i + (G_{i,r}^o + G_{i,l}^o) V_i + ZW_i V_i + W_i V_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

将 n 个(13)式相加,并注意到

$$G_{i+1,l}^o = -G_{i,r}^o \quad (14)$$

以及 $G_{1,l}^o$ 和 $G_{n,r}^o$ 为零,则有

$$\sum_{i=1}^n Q_i^o V_i + \sum_{i=1}^{n-1} G_{i+1,l}^o V_i = \sum_{i=1}^n W_i V_i + \sum_{i=1}^n ZW_i V_i \quad (15)$$

其中 V_i 为第 i 个条块右侧界面上该条块相对于右侧条块的速度,即

$$V_i = V_i - V_{i+1} \quad (16)$$

而与“真实的滑动机构”相应的力系则是 W, P_i, ZW_i, G_i , 同样有

$$\sum_{i=1}^n Q_i V_i + \sum_{i=1}^{n-1} G_{i+1,l} V_i = \sum_{i=1}^n W_i V_i + \sum_{i=1}^n ZW_i V_i \quad (17)$$

要指出的是,加载的本质决定了式(15)和(17)

右侧的两项均应为正,即 $\sum_{i=1}^n W_i V_i > 0$

将式(15)和(17)相减,有

$$\sum_{i=1}^n (Q_i - Q_i^*) V_i + \sum_{j=1}^{n-1} (G_{i+1,1}^* - G_{i+1,1}^0) V_i^j = (Z - Z^*) \sum_{i=1}^n W_i V_i \quad (18)$$

由 Q^0 过渡到 Q , G^0 过渡到 G , 意味着应力矢量不是由屈服面内(即弹性区)某点过渡到屈服面上,就是在屈服面上移动,根据 Drucker 准则,可以认定左边两项均大于或等于零,故有

$$Z \geq Z^* \quad (19)$$

3.3 最小原理的证明

在本文第2节,已经明确了边坡问题的塑性力学上限解的提法:如果对于真实的多块体滑动机构和某一机动可能的多块体滑动机构,其加载系数 η 和 η^* 分别是按下面式(20)和(21)算得的。

$$\sum_{i=1}^n Q_i V_i + \sum_{i=1}^n G_{i+1,1}^* V_i^j = \sum_{i=1}^n W_i V_i + \sum_{i=1}^n Z W_i V_i \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n Q_i^* V_i^* + \sum_{i=1}^n G_{i+1,1}^* V_i^{*j} = \sum_{i=1}^n W_i V_i^* + \sum_{i=1}^n Z^* W_i V_i^* \quad (21)$$

那么,必有

$$Z \geq Z^* \quad (22)$$

根据已经证明的能量法和静力法的等效性原理,知道,按式(20)和(21)计算的 Z 和 Z^* 和按本文阐述的极限平衡出发的 Sarma 法获得的相应值是一样的,因此,确认式(22)实际上就证明了最小原理。

5 结 语

本文对潘家铮最大最小原理的讨论是针对传统的二维极限平衡条分法的。通过分析,可以看到:

1) 完整地实现潘家铮最大最小原理的操作步骤,必须使用对滑动体斜条分的极限平衡法(Sarma法),这些达到了极限平衡的倾斜界面和底滑面一样,都属于潘家铮原理中论述的滑面。

2) 在证明的过程中,除了要使用 Drucker 准则外,还要应用虚功原理使潘氏原理中有关静力平衡的叙述转换成 Drucker 准则中的功能平衡的表达式。

本文叙述的实现潘家铮最大最小原理的稳定分

析方法已在工程实践中多次应用,获得与传统的垂直条分法基本一致的成果^[3],这一方法还被推广到地基承载力的计算中,获得与 Prandtl 完全一致的结果^[4]。

参 考 文 献

- 1 潘家铮. 建筑物的抗滑稳定和滑坡分析. 北京: 水利出版社, 1980年
- 2 Sarma. K S. Stability analysis of embankments and slopes. Journal of Geotechnical Engineering. ASCE. 1979, 105 (GT. 12): 1511~ 1524
- 3 Chen Zuyu, Donald I. Comparison between the limit equilibrium and limit analysis method. Proceedings of the 10th Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Beijing International Academic Publisher, 1995, 267~ 270
- 4 陈祖煜, 地基承载力的数值分析. 岩土工程学报, 1997, 19(5): 6~ 13

On Pan's principles of soil and rock stability analysis

CHEN Zuyu

Department of Hydraulic and Hydropower Engineering,
Tsinghua University, Beijing 100084, China

Abstract This paper gives a formal demonstration on Pan Jiazheng's principles of soil and rock stability analysis, which states that (1) among all possible slip surfaces of a soil or rock structure, the real one renders the minimum resistance against the external load; (2) the real internal force or stress distribution along the slip surface is the one that provides the maximum resistance against the external load. The demonstration was based on Drucker's Postulates and Sarma's stability analysis method of non-vertical slices. The virtual work principle and the upper and lower bound theorems in plasticity played an important role in the theoretical work. The paper also presents an example which shows that by proper implementations of Pan's principle, it is possible to find the accurate results given by the closed-form solutions.

Key words landslide; soil mechanics; rock mechanics; upper and lower bound theorems of plasticity