

文章编号: 0559-9350 (2001) 08-0001-06

## 拱座稳定的三维极限分析

陈祖煜<sup>1</sup>, 汪小刚<sup>1</sup>, 王玉杰<sup>1</sup>, 王 剑<sup>1</sup>, 陆 峰<sup>1</sup>

(1 中国水利水电科学研究院 岩石土工所, 北京 100044)

摘 要: 本文介绍了一个建立在塑性力学上限定理基础上的边坡稳定三维极限分析方法, 该法将滑动体划分成一系列具有倾斜侧面的条柱, 引入 Mohr-Coulomb 相关联法则后可求得这些条柱的塑性速度场, 通过功能平衡方程可算得安全系数, 采用最优化方法计算临界滑动模式, 并使用这一方法计算了小湾拱座的稳定安全系数。

关键词: 拱坝; 拱座稳定; 边坡稳定分析; 极限分析

中图分类号: TV642.4

文献标识码: A

拱坝的拱座一方面作为边坡存在向河道方向下滑的可能, 另一方面在强大的拱推力的作用下存在平行河道的滑动的可能性。拱坝的拱推力的特点是, 在高程较高部位推力较小, 并指向山里, 不大可能导致山体失稳。随着高程降低, 拱推力增大, 其作用方向逐渐与河道一致, 山体稳定问题随之突出。因此, 可能存在一个临界高程, 拱座在拱推力作用下, 在此高程以下部分岩体滑出。上述地形、地质和受力条件使分析拱座稳定问题变得十分复杂。拱座稳定问题实际上是一个三维边坡稳定分析问题。但是, 其滑动方向系由平行于河道的拱推力和垂直河道的重力的综合作用形成, 具有明显的三维特性。本文作者近年致力于开发一个理论基础比较严格、使用方便的边坡稳定三维极限分析方法。作为这一方法的实际应用, 对小湾拱座稳定性问题开展了研究, 现介绍获得的初步成果。

## 1 边坡稳定的三维极限分析

1.1 边坡稳定极限分析的基本原理 W. F. Chen<sup>[1]</sup> (1978)、Donald 和 Chen<sup>[2]</sup> (1997) 曾从边坡稳定角度阐述这一极限分析的原理。对于一个处于极限状态的边坡 (见图 1), 假定在土体里存在一个塑性区  $\Omega^*$ , 塑性区里各点的材料屈服且服从 Mohr-Coulomb 破坏准则。在这一塑性区和边界上如果由于某一外荷载增量导致一个塑性应变  $\epsilon_{ij}^*$ , 那么可以通过塑性力学中的上限定理<sup>[3]</sup> 求解相应这一塑性变形模式的外荷载  $T^*$  (图 1)。

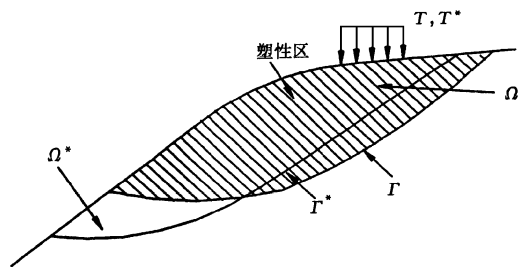


图 1 二维塑性力学上限解示意

$$\int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^* \cdot \epsilon_{ij}^* dv + \int_{\Gamma^*} dD_s^* = WV^* + T^* V^* \quad (1)$$

上限定理指出, 相应真实塑性区  $\Omega$  的外荷  $T$  一定比  $T^*$  小或相等。式中  $V^*$  是外荷载增量引起的相应塑性位移速率,  $W$  是塑性区的体积力。式 (1) 的左边两项分别是产生于破坏体  $\Omega^*$  内和沿滑裂面  $\Gamma^*$  的内部耗散能。因此, 极限分析方法就是在许多可能的滑动机构  $\Omega$  中寻找一个使  $T^*$  最小的临界滑动机构。

收稿日期: 2000-06-08

作者简介: 陈祖煜 (1943-), 男, 重庆人, 教授, 研究方向为高边坡稳定。

在实际中，应用安全系数而不是加载的方法确定结构的安全裕度。此时，定义  $c'_e = c'/F$  和  $\tan\phi'_e = \tan\phi'/F$ 。通过下式求解  $F$ （注意式（2）中  $T$  为设定的外荷，已不再是未知量）

$$\int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^* \cdot \varepsilon_{ij,e}^* dv + \int_{\Gamma^*} dD_{s,e}^* = WV^* + TV^* \quad (2)$$

式中： $\varepsilon_{ij,e}^*$  和  $D_{s,e}^*$  为相应  $c'_e$  和  $\phi'_e$  计算的内能耗散率。同样，可通过求解隐含于  $c'_e$  和  $\phi'_e$  中的  $F$  的最小值逼近临界的破坏模式。

使用式（2）来求解安全系数  $F$ ，需要确定式（2）左边的二项能量耗散和同时包含在左、右侧的塑性速度  $V^*$ 。我们先来研究一个外荷增量导致的塑性变形速率。对于遵从 Mohr-Coulomb 破坏准则的材料，屈服面为

$$f(\tau, \sigma) = \tau - c'_e - (\sigma - u)\tan\phi'_e = 0 \quad (3)$$

式中： $\tau$  和  $\sigma$  分别是破坏面上的剪应力和正应力， $u$  是孔隙水压力。

假定相关联流动法则适用于这种材料，则法向速度  $V_n$  和切向速度  $V_s$  遵守以下关系

$$\frac{V_n}{V_s} = \frac{\partial f/\partial \sigma}{\partial f/\partial \tau} = -\tan\phi'_e \quad (4)$$

式（4）表明对适用于相关联流动法则的 Mohr-Coulomb 材料，塑性速率与破坏平面的夹角为  $\phi'_e$ 。从三维的视角观察， $V$  将存在于以角度  $\pi/2 - \phi'_e$  绕破坏面法线旋转的锥面上（图 2）。

$$\Phi(V, N) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \phi'_e\right] = \sin\phi'_e \quad (5)$$

式中： $\Phi(V, N)$  代表  $V$  与  $N$  的夹角； $N$  代表破坏面法线的方向向量。这一特性使计算一个协调的塑性位移场变得可能。需要说明的是，虽然大多数岩土材料在加荷过程中并不遵守相关联的流动法则，但极限分析只是研究材料在破坏时的变形速率，由于此时岩土材料或多

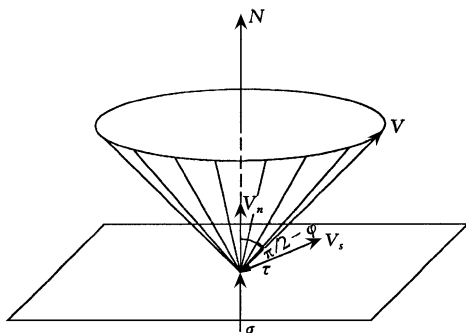


图 2 塑性位移速率位于以角度  $\pi/2 - \phi'_e$  绕破坏面法线旋转的锥面上

或少地具有剪胀特征，因此，即使材料不遵守相关联流动法则，采用式（4）仍期望较好的近似性。

塑性速度的方向知道后，破坏面上的剪应力方向就知道了。因而破坏面上单位面积耗散能可用以下式计算。

$$dD = \tau V_s + \sigma V_n = (\tau \cos\phi'_e - \sigma \sin\phi'_e) V = (C \cos\phi'_e - u \sin\phi'_e) V \quad (6)$$

式（6）说明对遵守 Mohr-coulomb 破坏准则的材料，确定内能耗散不需要知道应力状态。一旦塑性速率  $V$  确定，即可获得  $dD$ 。这样，通过式（1）或式（2）即可求得  $T^*$  或  $F$ 。

在实际应用上限理论求解边坡稳定问题时我们将塑性区近似分为一系列具有倾斜侧面的条块。下面通过一个二维的例题，说明上限定理在边坡稳定分析中的解法。这是一个均质无重量边坡（图 3）， $C = 98\text{kPa}$ ， $\phi = 30^\circ$ ，边坡的倾角为  $35^\circ$ ，该例题已由 Sokolovski（1954）利用滑移线场方法给出闭合解。极限荷载  $T$  的闭合解为  $111.44\text{kPa}$ 。相应这个荷载，作为稳定分析的第一步，我们假设一个图 3（a）所示的 4 条块破坏机构。

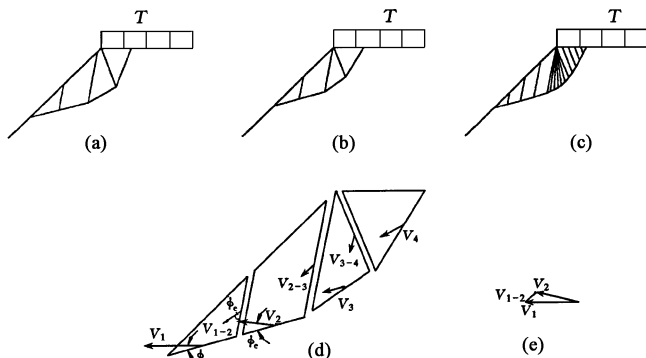


图 3 说明上限理解法的一个二维的例题

左边第一个条块的速度  $V_1$  置为 1，由于第 1 和第 2 条块的速度  $V_1$ 、 $V_2$  和它们相对速度  $V_{1-2}$  均应与各自的滑动面成  $\phi_e$  角，因此这 3 个矢量的方向均已知，可通过图 3（d）的矢量三角形将  $V_2$  和  $V_{1-2}$  的

数值求得. 依次类推, 即可求得第 3、4 条块的绝对速度以及与相邻块的相对速度. 利用式 (6), 可以计算沿条块侧面和底面的内能耗散, 分别代表式 (2) 左侧的第 1 和第 2 项. 可通过式 (2) 得到安全系数, 等于 1.047. 下一个步骤是在所有可能的四块体破坏模式中找到一个相应的安全系数最小的临界滑动模式. 程序使用最优化方法自动搜索到图 3 (b) 所示的一个临界破坏模式, 得到最小安全系数  $F=1.013$ . 如果将破坏体离散为 16 个条块, 我们获得图 3 (c) 所示的临界破坏模式, 这个模式几乎和滑移线理论的结果完全一致, 相应  $F=1.006$ , 也十分接近理论值  $F=1$ .

**1.2 三维极限分析方法** 边坡稳定极限分析的三维方法使用一系列具有倾斜界面的柱体模拟破坏体 (图 4、图 5). 符号  $\downarrow$  指两列之间的界面, 符号  $\leftrightarrow$  指两行之间的界面, 参见图 4. 式 (1) 和式 (2) 可以用以下三维领域的求和形式近似表示.

$$\sum D_{i \leftrightarrow j}^* + \sum D_{i \downarrow j}^* + \sum D_{i,j}^* = WV^* + T^* V^* \quad (7)$$

$$\sum D_{i \leftrightarrow j, e}^* + \sum D_{i \downarrow j, e}^* + \sum D_{i,j, e}^* = WV^* + T^* V^* \quad (8)$$

其中方程左边的 3 项分别指两行条柱之间的界面、两列条柱之间界面及滑裂面上的消耗能通过式 (6) 确定.

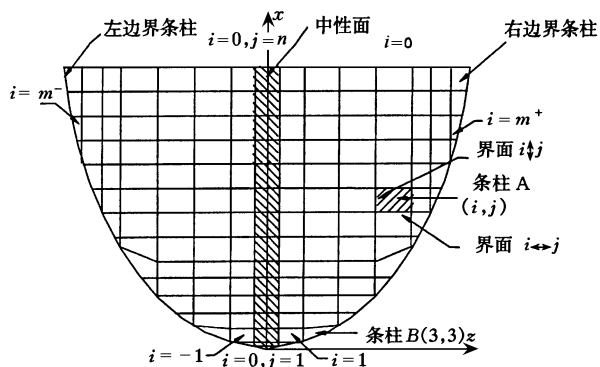


图 4 离散平面

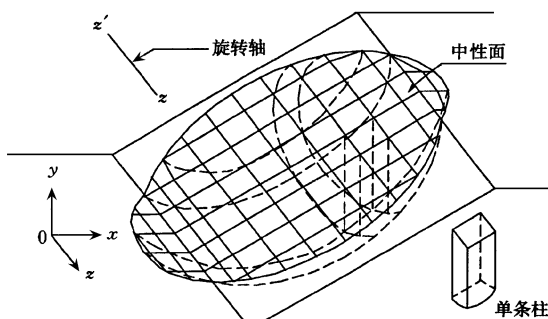


图 5 破坏体三维离散图及相应坐标系

首先建立如图 5 所示的坐标系. 假定滑体中存在一个“中性面”, 在这个面上, 滑体的速度均与这个面一致, 即没有垂直这一滑面的速度分量. 计算速度场从中性面开始, 逐次向左、右侧条柱展开. 一旦速度场确定, 即可通过式 (7) 或式 (8) 算得  $T^*$  或  $F$ .

对编号为  $i, j$  的条块, 它的速度为  $V_{ij}$ .  $i, j$  条块相对  $i-1, j$  条块的速度, 即列与列界面上的相对速度记为  $V_{i \downarrow j}$ . 与此类似,  $V_{i \leftrightarrow j}$  代表条块  $i, j$  相对条块  $i, j-1$  的速度. 参照图 6.

上限分析方法要求满足流动法则和位移协调, 即要求速度与相应的滑动面夹角为  $\varphi$ , 这一条件使得某一条块的速度可由其相邻条块的速度来确定. 具体的求解方法根据条块所处的不同位置可分为以下 3 类.

**第 1 类:** 沿中性面条块的速度场. 由于沿这一面的条块速度在  $z$  方向没有分量, 计算  $i=0$  条块系列 (即在  $xoy$  平面上的条块) 的速度, 与二维能量方法的原则相同. 给定  $V_{0j}$ , 容易得到  $V_{0j+1}$  和  $V_{0 \leftrightarrow j}$ , 具体算法参见有关二维上限解的文献 [2, 4].

**第 2 类:** 破坏体内条块的速度场. 对于编号  $i, j$  的条块, 它的速度  $V_{i,j}$  可以依据其左边和下边相邻的条块的速度  $V_{i-1,j}$  和  $V_{i,j-1}$  导出 (图 4 中条柱 A, 图 6 (a)).

根据流动法则, 要求

$$\Phi(V_{i,j}, N_{i,j}) = \sin \varphi_{i,j} \quad (9)$$

$$\Phi(V_{i \downarrow j}, N_{i \downarrow j}) = \sin \varphi_{i \downarrow j} \quad (10)$$

$$\Phi(V_{i \leftrightarrow j}, N_{i \leftrightarrow j}) = \sin \varphi_{i \leftrightarrow j} \quad (11)$$

其中

$$\Phi(V, N) = \Phi(X, Y, Z, L, M, N) = \frac{XL + YN + ZL}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} \quad (12)$$

式中:  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  是  $V$  的分量,  $L$ 、 $M$ 、 $N$  是破坏面的法线  $N$  的方向余弦。

我们知道

$$V_{i;j} = V_{i,j} - V_{i-1,j} \quad (13)$$

$$V_{i\leftrightarrow j} = V_{i,j} - V_{i,j-1} \quad (14)$$

因为  $V_{i-1,j}$  和  $V_{i,j-1}$  是已知的, 因此式 (9~11) 3 式中仅包含  $V_{i,j}$  的分量这 3 个未知量, 可以通过迭代确定。

第 3 类: 滑坡体边界条块的速度。考察各列第 1 个条块的速度, 其编号为  $i, k$  (图 4 中条块 B, 图 6 (b))。与第 2 类条块相比, 它仅有左邻条块, 编号为  $i-1, k$ , 但没有下邻条块。我们称该类条块为边界条块。  $V_{i,k}$  只能依据已知速度  $V_{i-1,k}$  确定。因此仅能利用式 (9、10) 两式, 不足以解出  $V_{i,k}$  的 3 个未知量。为此, 要引入一个补充条件才能确定这一类条块的速度。我们假定编号  $i, k$  的条块  $V_{i,k}$  的值可用  $V_{i-1,k}$  的值来表示, 即

$$|V_{i,k}| = \xi_i |V_{i-1,k}| \quad (15)$$

有了这个附加假设, 即可以通过式 (9、10) 确定每一系列边界条块的速度。

可见, 在建立三维极限分析方法时引入了关于中性面和端部条块的假定。文献 [5] 曾详细讨论引入这些假定的可行性, 并提出了建立更为严格的不包含这二个假定的方法, 但这将导致十分繁复的计算。计算实践表明, 假定的  $\xi_i$  数值对计算结果影响不大, 同时采用  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \dots = 1.0$  相应的安全系数总是最小, 因此, 从实用的角度看, 可以采用  $\xi_i = 1$  这一假定。

确定整个速度场的计算过程包括以下几步: (1) 取中性面第 1 个条块即  $V_{0,1}$  的速度为 1。依照计算第 1 类条块速度场的方法即可导出  $V_{0,2}$  和  $V_{0\leftrightarrow 2}$ 。逐步求解得到  $V_{0,j}$  和  $V_{0\leftrightarrow j}$ ,  $j=2, \dots, n$ 。(2) 按计算第 3 类条块速度的方法, 计算边界条块 1,  $k$  的速度  $V_{1,k}$ 。(3) 从  $V_{1,k}$  开始, 按照计算第 2 类条块速度的方法依次递推, 计算  $V_{1,j}$ 、 $V_{1\leftrightarrow j}$  和  $V_{1;j}$  ( $j=k, k+1, \dots$ ), 即  $i=1$  的系列条块的绝对速度和相对速度。(4) 按步骤 (2) 和 (3) 的相同作法计算  $i=2, \dots, m^+$  条块系列的速度。(5) 按 (2) 至 (4) 类似的步骤计算中性面左侧条块系列  $i=-1, \dots, m^-$  的速度。

## 2 算例

根据本文介绍的方法, 已编制了三维边坡稳定分析的计算程序 EMU-3D。本节介绍一个在文献中广泛引用的具有闭合解的例题, 这是一个滑裂面为球形的均质边坡 (图 7)。如果建立作用在球体上的力对  $z$  轴的力矩平衡方程, 可得  $F=1.402$ 。表 1 列出 Hungr 等<sup>[6]</sup> (1989), Lam & Fredlund 等<sup>[7]</sup> (1993) 采用三维极限平衡方法 (3DSLOPE) 获得的计算成果。

应用 EMU-3D, 首先用垂直的行界面和列界面将球体划分成条柱。由于球面左右对称, 故仅拿球体的一侧 ( $z > 0$  一侧) 进行计算。在这一侧, 每隔 5m 建一个平行于  $xoy$  平面的列界面。划分后的条柱系统的立体图如图 8。对于这样一个分块模式, 采用  $\xi_i = 1.0$ 。获得安全系数  $F=1.870$ 。然后, 令行界面倾角  $\delta$  随意变动, 采用最优化方法搜索最小安全

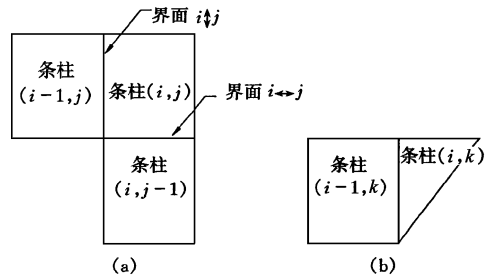


图 6 滑坡体内的六面体单元

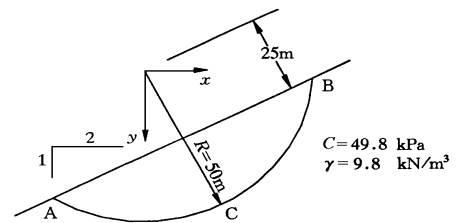


图 7 具有闭合解的试验例题

系数, 获得如图 8 示的各行界面的斜条条模式. 相应这一解的安全系数的最小值为 1.493. 计算发现, 各条柱的速度的数值在 0.8 至 1.0 范围内变动 (中性面上第 1 个条柱为 1). 因此, 式 (12) 中的  $\xi_i$  也不会与这一范围偏离很远.

表 1 图 8 所示例题各种方法所得  $F$  的比较

方法	安全系数 $F$	
闭合解	1.402	
CIARA (Hungar, 1989)	1.422	
3D-SLOPE (1200 个条柱)	1.386	
3D-SLOPE (500 个条柱)	1.402	
EMU-3D	$\omega=1.0$	1.493
	$\omega=1.2$	1.483

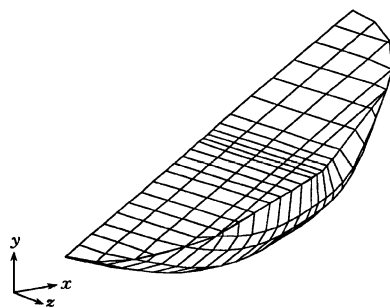


图 8 圆球滑裂面例题三维示意

到目前为止, 我们仍保持列界面为垂直方向. 如果让列界面向与中性轴相反的方向倾 (表 1 中  $\omega=1.2$  情况), 可以获得一个更小的安全系数  $F=1.483$ .

### 3 小湾拱座稳定分析

小湾水电站拱座抗力体部分岩体主要为弱风化角闪斜长片麻岩, 两岸拱座山体呈凸形, 在拱推力方向相对较单薄. 该地质区域内主要存在 3 组节理裂隙面, 即倾向  $270^\circ$  和  $10^\circ$  左右的两组陡倾角结构面和一组与左、右岸拱座边坡倾向基本一致, 倾角  $40^\circ$  左右的卸荷裂隙. 因此, 该拱座一方面作为边坡有向河道方向沿卸荷裂隙下滑的可能, 另一方面在强大的拱推力的作用下存在平行河道的方向沿两组陡倾角结构面组合滑动的可能性.

右岸拱座稳定分析, 以接近河床的高程 1010m 的卸荷裂隙作为中性面, 仅计算位于中性面以上部分岩体的稳定性. 与中性面平行的各组卸荷裂隙就是三维破坏模式中的列界面. 而倾向  $10^\circ$  的那组陡倾角节理面则为行界面. 用样条函数分别构筑从高程 1090m, 1130m, 1170m, 1210m 推出的空间滑裂面、沿滑面, 行界面和列界面的抗剪强度“剪摩”指标如表 2 所示. 相应每一推出高程, 都要应用最优化方法计算相应最小安全系数的临界滑裂面.

表 2 小湾右岸拱座稳定分析采用的抗剪强度指标

	$\varphi/^\circ$	$C/\text{MPa}$
微风化岩体	20	1.5
垂直裂隙 (行界面)	20	1.5
卸荷裂隙 (列界面)	30	0.1

表 3 安全系数与拱座推出高程关系

上部从拱座推出的高程 /m	1090	1130	1170	1210
安全系数 (经优化后推荐的体型)	3.72	3.63	3.61	3.70

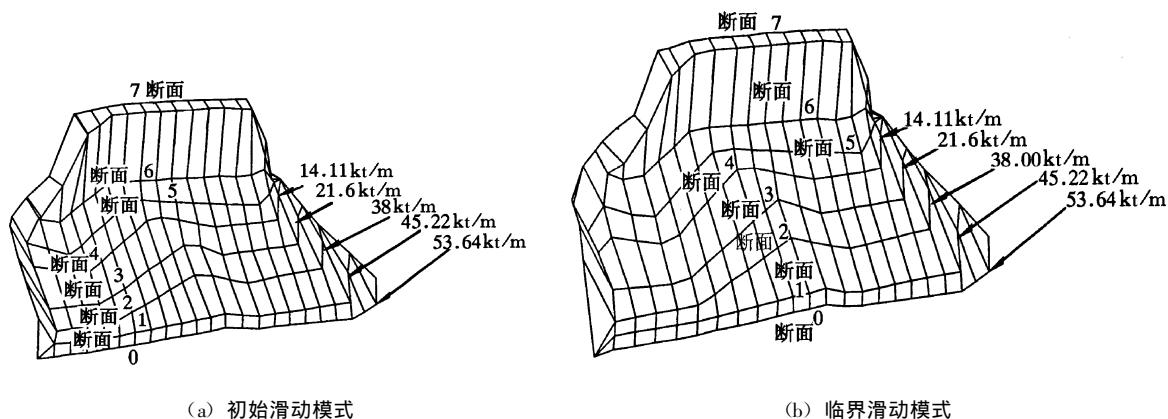


图 9 小湾右岸拱座稳定分析

图 9 (a) 示从 1090m 推出初始滑裂面, 得安全系数  $F=4.02$ , 使用最优化方法获得如图 9 (b) 所示的临界滑裂面, 相应安全系数为 3.61. 采用同样的方式, 对从推出高程 1130m、1170m 和 1210m 推出情况进行复核, 得到如表 3 所示安全系数, 可见拱座在 1130m 至 1170m 之间推出安全系数最小, 为 3.60 左右.

#### 4 结语

本文提出了一个求解三维边坡稳定极限分析方法, 并成功地应用于拱座岩体的稳定分析. 这一方法的特点是: (1) 安全系数通过一个功、能平衡的标量公式求得, 回避了在三维领域内引入复杂的矢量运算以及大型非线性迭代算法. (2) 方法建立在塑性力学上限定理这一理论的基础上, 引入 Mohr-coulomb 屈服准则后使计算速度场和内能耗散成为可能. (3) 采用计算技术和非线性规划理论的新成果, 使计算临界滑动模式成为可能.

#### 参 考 文 献:

- [ 1 ] Chen W F. Limit analysis and soil plasticity [ M ]. Elsevier Scientific Publishing Co., New York, 1975.
- [ 2 ] Donald I, chen Z Y. Slope stability analysis by the upper bound approach: fundamentals and methods [ J ]. Canadian geotechnical Journal, 1997, 34: 853—862.
- [ 3 ] 王仁, 黄文彬. 塑性力学引论 [ M ]. 北京: 北京大学出版社, 1982.
- [ 4 ] 陈祖煜, 高锋. 地基承载力的数值分析 [ J ]. 岩土工程学报, 1997, (5).
- [ 5 ] Hungr O, Salgado F M, Byrne P M. Evaluation of a three-dimensional method of slope stability analysis [ J ]. Canadian Geotechnical Journal, 1989, 26: 679—686.
- [ 6 ] Lam L, Fredlund D G. A general limit equilibrium model for three-dimensional slope stability analysis [ J ]. Canadian Geotechnical Journal, 1993, 30: 905—919

### The 3-D stability analysis for arch dam abutment

CHEN Zu-yu<sup>1</sup>, WANG Xiao-gang<sup>1</sup>, WANG Yu-jie<sup>1</sup>, WANG Jian<sup>1</sup>, LU Feng<sup>1</sup>

(1 China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100044, China)

**Abstract:** This paper describes a 3-D slope stability analysis method based on the upper-bound theory of plasticity. The failure mass is divided into a number of prism with inclined interfaces. The plastic deformation velocity field can be determined based on the Mohr-coulomb associated flow law. The factor of safety is obtained by the energy-work balance equation. The critical failure mode is obtained using the method of optimization. This method is applied to calculate the safety factor of the arch dam abutment in Xiaowan Project.

**Key words:** arch dam; abutment; slope; stability; the upper-bound analysis.