

地基承载力的数值分析方法*

陈祖煜

高 锋

(中国水利水电科学研究院岩土所, 北京, 100044) (水利部长江水利委员会设计院 武汉, 430010)

文 摘 介绍了边坡稳定的塑性力学上限解在计算地基承载力方面的推广。简要回顾了由 Donald 和 Chen 提出的能量法的基本原理, 说明该法可以得出与闭合解一样精确的解答。使用此数值方法来复核地基容重不为零时承载力计算的各种经验方法, 发现这些经验方法在大多数情况下均低估了地基的承载力。计算基础有埋深和荷载偏心的经验公式也低估了地基承载力约 5% ~ 10%。

关键词 地基承载力, 塑性力学上限定理, 最优化方法。

1 前 言

土压力、地基承载力和边坡稳定是经典土力学的 3 个主要领域。许多学者(Sokolovski, 1954^[1], Chen, 1975^[2])指出, 这 3 个问题都基于共同的极限平衡分析原理, 可以采用相同的分析方法。但是, 在长期的实践中, 这 3 个领域各形成了自己的体系。在地基承载力领域, 目前常用的计算方法仍然是基于 Prandtl 解的各种经验修正公式。文献[2]曾应用塑性力学上下限原理, 在建立地基承载力、土压力和边坡稳定分析统一的理论和方法方面作了大量的工作, 但其有关的研究一直是在变分原理基础上进行的, 因此, 难以扩展到具有复杂边界和分层土体的实际工程问题中。栾茂田(1995)^[3]等曾提出一个基于滑楔破坏模式的分析方法, 其普遍适用性还有待进一步论证。显然, 只有开发数值分析的方法, 方可使大部分实际问题方便地获得解答。

近期, 本文第一作者和澳大利亚 I. Donald 教授合作, 在二维领域应用塑性力学上限定理进行边坡稳定的理论研究^[4,5]。该方法从变形协调出发, 对于一个设定的滑裂面和斜分条模式, 建立协调的速度场, 根据外力功和内能耗散相平衡的原理确定相应的安全系数或加载系数, 然后应用最优化方法, 确定对应于最小安全系数的那个临界滑裂面和斜分条模式(以下简称能量法)。这一方法在精确地确定边坡稳定安全系数方面获得了成功。由于地基实际上是一个坡度为零的边坡, 将该成果推广到地基承载力, 自然是一个十分具有理论和实用价值的课题。

2 极限分析法的理论基础和计算步骤

2.1 上限定理的基本命题

在边坡稳定和地基承载力分析领域, 对上限定理的描述可以用下面的命题表达(图 1):

在塑性区 Ω^* , 给出一个机动可能的应变场 ϵ_{ij}^* , 并在滑裂面 Γ^* 上给出一个相应的速度场 V^* , 那么, 按照下式计算获得的外荷载 T^* 将比一个包含有真实的塑性区 Ω 和真实的滑裂面 Γ 的临界荷载 T 大或与其相等。

* 国家自然科学基金资助项目(No. 59679013)。

到稿日期: 1996-01-11。

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij}^* d\Omega + \int_V dD_s^* = WV^* + T^* V^* \quad (1)$$

上式左边的第一、第二项分别为塑性区内和滑裂面的内能耗散; W 为塑性区土体重。因此, 在诸多协调的位移场中给出最小的 T^* 的那个一定最接近真实的临界荷载 T 。

在地基承载力问题中, 通常定义加载系数 η^* 为

$$\eta^* = (T^* - T_0) / T_0 \quad (2)$$

其中 T_0 为地基的实际承受的外荷载, 那么上限定理的命题具体化为寻找一个使 η^* 获得最小值 η 的应变场和速度场。

2.2 计算内能耗散

如果材料遵守莫尔-库仑破坏准则和相关联的流动法则, 则可确认沿滑面的速度 V 与滑面夹角为摩擦角 φ ^[2], 单位面积内能耗散为(图 2):

$$dD = (c \cos\varphi - u \sin\varphi) V \quad (3)$$

其中 c 为凝聚力; u 为孔隙压力; V 为滑块沿滑面的在单位荷载增量下产生的相对位移, 通常称变形速率。

2.3 计算多块体破坏模式协调的速度场

对某一边坡的塑性区, 将其用一系列倾斜的线分成若干楔块, 每一楔块都视为刚体, 其变形速率为 V 。图 3 示出 3 个块体的系统。 V 与滑面夹角为 φ , 与右边相邻块体的相对速度为 V_j , V_j 与该两块体交界面的夹角为 φ^j 。内能耗散发生于该楔块的底面和楔块间的界面, 在刚体内为零。

根据位移协调要求, 可以得到

$$V_r = V_l \frac{\sin(\theta_l - \theta_j)}{\sin(\theta_r - \theta_j)} \quad (4)$$

$$V_j = V_l \frac{\sin(\theta_r - \theta_l)}{\sin(\theta_r - \theta_j)} \quad (5)$$

其中 V_l 和 V_r 分别为左侧和右侧条块的速度; $\theta_j = \pi/2 - \delta + \varphi$, $\theta_l = \pi + \alpha - \varphi$, $\theta_r = \pi + \alpha - \varphi_r$; α 为底面与 x 轴正向夹角; δ 为侧面与 y 轴正向夹角; θ 为速度与正 x 轴的夹角。如果将条块的宽度取为无限小(图 4), 还可通过积分获得滑面上坐标为 x 的条块的绝对速度和相对速度。

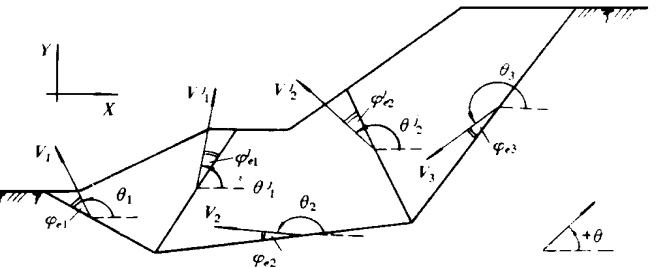


图 3 三块体破坏结构, 相邻块体的位移协调

$$V = E(x) V_0 \quad (6)$$

$$V_j = -V_0 \operatorname{cosec}(\alpha - \varphi - \theta_j) E(x) d\alpha \quad (7)$$

其中

$$eD(x) = \kappa \exp \left[- \int_x^B \operatorname{ctg}(\alpha - \varphi - \theta_j) \frac{d\alpha}{d\zeta} d\zeta \right] \quad (8)$$

$$\kappa = \prod_{i=1}^k \frac{\sin(\alpha_i^l - \varphi_i^l - \theta_j^l)}{\sin(\alpha_i^r - \varphi_i^r - \theta_j^r)} \quad (9)$$

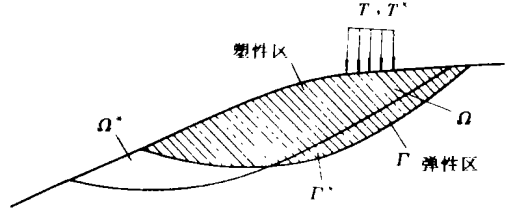


图 1 塑性力学上限原理简图

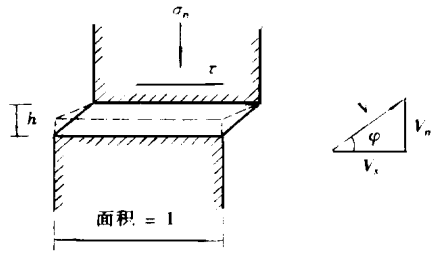


图 2 确定速度方向和能量耗散示意图

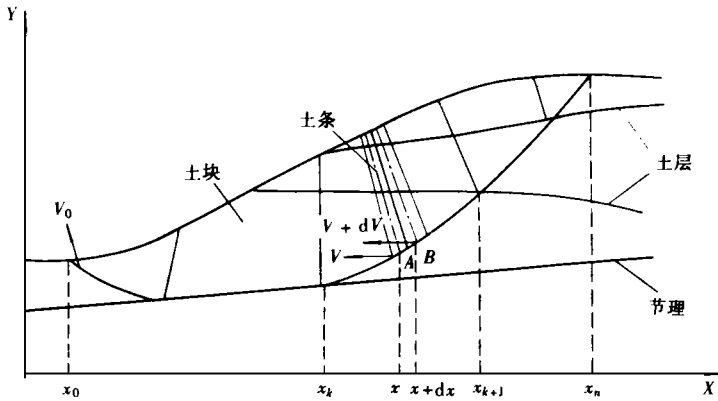


图4 光滑滑裂面速度场的计算

V_0 为左端点 ($x = x_0$) 的速度。在滑裂面上第 k 个 α 或 φ 发生突变。上标 l 和 r 代表该不连续点左和右的物理量。计算从第一个界面开始, 到第 $n-1$ 个界面终止。这样, 对滑面上横坐标为 x 的任一点, 其条块绝对速度 V 和条块侧面的相对速度 V_j 都可表达为滑面左端点 $x = x_0$ 处的速度 V_0 的函数。将获得各条块的绝对速度和相对速度代入式(3)再代入式(1), 其中式(1)左侧第一项可通过将 V_j 替代式(3)中 V 获得。消去左右侧 V_0 , 就可求解加载系数 η^* 如下。

定义

$$G = \int_{x_0}^x [(c_e \cos \varphi - u \sin \varphi) \sec \alpha - (\frac{dW}{dx} + \frac{dT_{0y}}{dx}) \sin(\alpha - \varphi) - (\eta' \frac{dW}{dx} + \frac{dT_{0x}}{dx}) \cos(\alpha - \varphi)] E(x) dx - \int_{x_0}^{x_n} (c' \cos \varphi' - u' \sin \varphi') L \operatorname{cosec}(\alpha - \varphi - \theta_j) \frac{d\alpha}{dx} E(x) dx - \sum_{k=1}^{n-1} (c' \cos \varphi' - u' \sin \varphi')_k L_k \operatorname{cosec}(\alpha_r - \varphi_r - \theta_j)_k \sin(\Delta\alpha - \Delta\varphi)_k E_l(x_k) \quad (10)$$

$$G_b = \int_{x_0}^{x_n} \frac{dW}{dx} \cos(\alpha - \varphi) E(x) dx \quad (11)$$

其中 dW = 土条重量; T_{0x} , T_{0y} 分别为 T_0 在 x 和 y 轴的分量; L 为土条侧面长度; η' 为水平地震力系数。式(10)最后一项计及滑面上 $(n-1)$ 个 α 或 φ 的不连续点相应的界面上的内能耗散。由式(2)定义的加载系数可通过下式计算:

$$\eta^* = G/G_b \quad (12)$$

2.4 求解临界滑动模式

陈祖煜和邵长明^[6]曾详细介绍了对传统的极限平衡法计算最小安全系数和临界滑裂面的数值分析方法。最优化方法为使用计算机搜索临界滑动模式创造了条件, 这些研究成果可以方便地推广到本文介绍的极限分析方法中。所不同的是, 滑动模式和垂直条分法相比, 增加了一个土条界面倾角 δ 每一条块的 δ 也将成为自由度。最优化方法将最终找到相应最小加载系数的滑裂面和斜分条模式。具体计算步骤通过下节[例2]介绍。

3 验证

为了验证上述推导的正确性, 下面通过两个例题进行分析探讨。

[例 1] 对具有垂直表面荷载的例题(图 5), 索科洛夫斯基(Sokolovski, 1954)给出的临界垂直荷载 q 的计算公式如下:

$$q = c \operatorname{ctg} \varphi \left\{ \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp [(\pi - 2\chi) \operatorname{tg} \varphi] - 1 \right\} \quad (13)$$

其中 χ 为边坡斜面相对水平线的夹角。相应的临界滑裂面由三段组成, AB, CD 为直线, 分别与边坡线和坡顶线夹角为 μ 。

$$\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (14)$$

BC 为一对数螺旋线, 其左右边界线 BO 和 CO 分别与边坡线和 y 轴线夹角为 μ 。

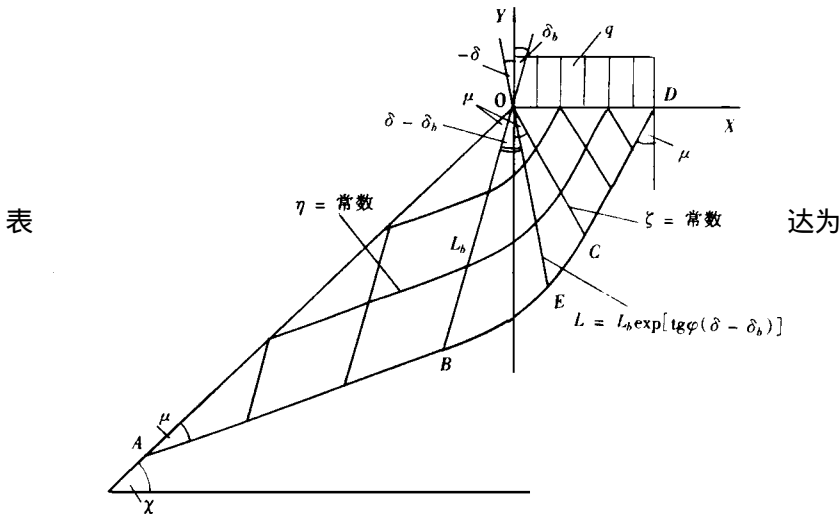


图 5 具有垂直表面荷载的例题

当边坡处于极限状态时, 加载系数 $\eta=0$ 。对 AB, BC 和 CD 段分别进行积分, 按式(13)确定的 q 将使按式(10)确定的 G 为零。

这一实例说明, 本文提出的上限定理的命题可通过解析解获得印证。详细推导参见文献[7]。

[例 2] 某一坡角为 35° 的均质边坡, 其水平顶面上作用一均布荷载, 荷载方向相对铅直线夹角为 δ' (图 6)。根据索科洛夫斯基(1954)提出的滑移线方法, 此题的理论破坏面由直线 AB, CD 和对数螺旋线 BC 组成, CD 和 CO 分别相对铅直线夹角 $\mu + \rho$ 和 $-(\mu + \rho)$ 。其中 $\mu = 45^\circ - \varphi/2$; ρ 为大主应力相对铅直线的夹角。

主要参数: $c=720\text{kPa}$, $\varphi=37^\circ$, $\chi=35^\circ$, $\delta'=24^\circ$, 理论解提供的解答是 $q=6.228\text{MPa}$, $\rho=28.4^\circ$ 。理论的滑裂面和土条侧面示于图 6 线 4。滑裂面通过联结 4 个点的样条函数形成。对设定的初始滑裂面 1 和相应的斜分条模式使用式(12)求得 $\eta^*=0.27$ 。从这个滑裂面开始, 进行最优化方法计算最终得临界滑裂面和条间界面(滑裂面 3, 虚线), 相应 $\eta=0.019$ 。滑裂面 2 是优化计算过程中通过随机搜索获得的滑裂面^[8]。如果用 5 个点来模拟该滑裂面, 则可得到 $\eta=0.0028$ 。与理论解相比, 无论是最小加载系数, 还是临界滑裂面和临界条间界面均十分接近。

通过[例 2] 说明, 应用最优化方法可以自动找到相应最小加载系数 η 的临界滑裂面和相应的斜分条模式。

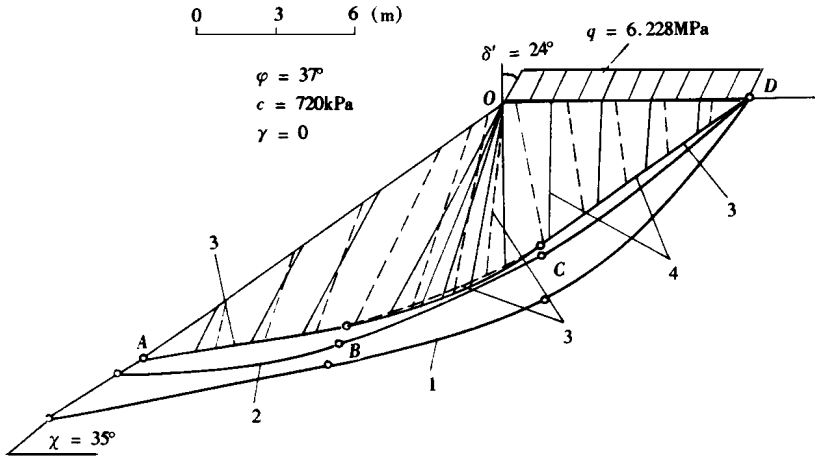


图6 具有倾斜表面荷载的例题

4 能量法在地基极限承载力计算中的推广

4.1 传统的承载力计算方法

地基极限承载力的计算包括两个方面,一方面是允许位移的校核,另一方面是极限承载力的计算。对于后者,Prandtl于1920年根据塑性力学理论导出了刚性基础压入无重量土中滑裂面的形状及其相应的极限承载力计算公式。由于数学上的严格解答在大部分的实际问题中是不可能得到的, Terzaghi^[9], Meyerhof^[10], Vesic^[11]等众多学者在Prandtl解的基础上对承载力理论进行了研究和发展,最终形成地基极限承载力的近似解答。这一近似解答的一般表达式为

$$q_u = cN_c + \gamma DN_q + 0.5\gamma BN_\gamma \tag{15}$$

其中 N_c, N_q, N_γ 为地基承载力系数,

$$N_c = (N_q - 1) \text{ctg} \varphi \tag{16}$$

$$N_q = \exp(\pi \text{tg} \varphi) \text{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) \tag{17}$$

N_γ 为一半经验数据,可从地基规范承载力表中查取或用半经验公式(表1)计算; B 为基础宽度; D 为基础埋深; γ 为土容量; q_u 为地基的极限承载力,即 T 在单位宽度上的强度。

表1 常用的计算 N_γ 的半经验公式表

公式推荐者	计算 N_γ 的半经验公式
Chen W. F	$N_\gamma = 2(1 + N_q) \text{tg} \varphi \text{tg}(\pi/4 + \varphi/2)$
Terzaghi	$N_\gamma = 1.8(N_q - 1) \text{tg} \varphi$
Meyerhof	$N_\gamma = (N_q - 1) \text{tg} 1.4\varphi$
Vesic	$N_\gamma = 2(1 + N_q) \text{tg} \varphi$

4.2 能量法在地基极限承载力计算中的应用

选取宽度 $B=17\text{m}$ 的条形基础进行计算分析,相应参数为: $c=144.5\text{kPa}$, $\gamma=0.0\text{kN/m}^3$ 。这个例子针对土的不同内摩擦角 φ 值进行计算。对于具有理论解的实例,使用式(13)获得的 q_u 应保证使用式(12)获得的 η 的最小值为零。图7示出 $\varphi=0^\circ$ 和 $\varphi=20^\circ$ 两种情况。使用同样的初始破坏模式如图7(a),应用最优化方法获得的临界破坏模式分别如图7(b)和7(c)所示, η 分别为0.004和0.008。计算机在搜索最小 η 值时,准确地将中部的土条侧面收敛于地基的左侧点,由此将滑裂面分为3个区域:荷载作用下面的三角形区域,对应于理论上的主动 Rankine 区;条间界面一端收敛于一点所对应的放射形区域,对应于理论上的 Prandtl 区;放射形区域另一端的另一个三角形区域对应于理论上的被动 Rankine 区。 $\varphi=0^\circ$ 时,滑裂面形状接近于圆弧, $\varphi \neq 0^\circ$ 时,滑裂面形状为两段直线接一段对数螺旋线。这就说明,采用建立在塑性力学上限

解基础上的地基极限承载力数值分析方法直接获得了理论上严格的地基极限承载力解答。

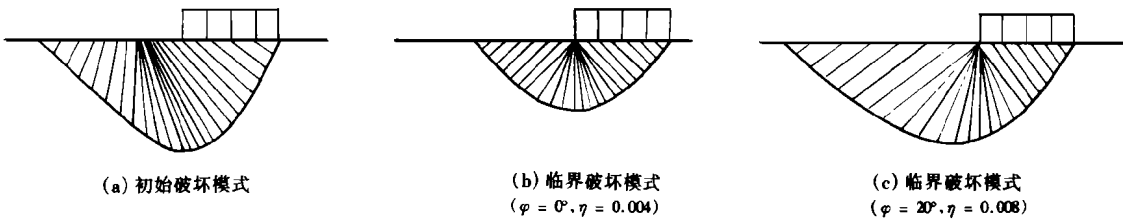


图 7 无重量土体地基极限承载力计算结果

表 2 将一系列 φ 值的计算成果与理论解对比, 可见成果的准确性相当稳定。所得的 η 值与理论值的误差均在 1% 左右, 而且自动搜索得到的临界滑裂面形状也与理论解一致。

表 2 上限数值解和理论解成果对比

$\varphi(^{\circ})$	0	5	10	15	20	25	30
q_n	746.1	978.7	1031.9	1597.4	2162.0	3028.5	4422.2
q_p	743.0	973.7	1025.9	1586.1	2143.6	2994.1	4355.2
η	0.0042	0.0051	0.0058	0.0071	0.0086	0.0115	0.0154

注: q_n 和 q_p 分别为根据数值解和理论解获得的极限承载力; $\eta = (q_n/q_p - 1)$; q 的单位为 kN/m^2 。

表 3 比较了容重不为零情况下表 1 所列的各种经验方法的准确性, 并示于图 8。可见 W. F. Chen 的公式计算结果与采用 Prandtl 的经验公式求得的结果最为接近, 但是在 φ 值超过 25° 后, η 值为负, 意味着高估了地基的承载力。而 Meyerhof 以及 Terzaghi 的方法则偏于保守。

表 3 对 $\gamma \neq 0$ 情况各种不同的经验公式和数值解成果对比

$\varphi(^{\circ})$	Numerical		Vesic		Meyerhof		Terzaghi		W. F. Chen	
	q_n	η_n	q_v	η_v	q_m	η_m	q_t	η_t	q_c	η_c
0	746.1	$\eta_n = 0.0$	743.0	0.004	743.0	0.004	743.0	0.004	743.0	0.004
5	1010.7	$\eta_n = 0.0$	1002.6	0.008	947.7	0.062	950.5	0.059	1004.9	0.006
10	1406.1	$\eta_n = 0.0$	1382.7	0.012	1256.8	0.105	1273.3	0.094	1395.5	0.008
15	2024.3	$\eta_n = 0.0$	1968.7	0.027	1749.2	0.136	1791.1	0.115	2011.0	0.006
20	3042.0	$\eta_n = 0.0$	2921.9	0.039	2558.4	0.159	2654.8	0.127	3039.0	0.001
25	4822.3	$\eta_n = 0.0$	4565.7	0.053	3971.7	0.176	4166.0	0.136	4867.1	-0.009
30	8157.2	$\eta_n = 0.0$	7595.3	0.069	6619.2	0.189	6968.2	0.146	8352.7	-0.024

注: 下标 n, v, m, t, c 分别代表数值解, 采用 Vesic Meyerhof, Terzaghi 和 W. F. Chen 方法的计算成果, q 的单位为 kN/m^2 。

在有容重且有埋深的条件下, 式(15)的经验公式将基础两侧埋置深度以内的土重以连续均匀分布的荷载考虑, 未能计及这部分土体的抗剪作用, 因此不可避免地存在着一定的误差。

文献[11]针对有埋深的情况, 对经验公式进行了修正, 每一项承载力系数前均乘以一修正系数, 各修正系数的计算公式为

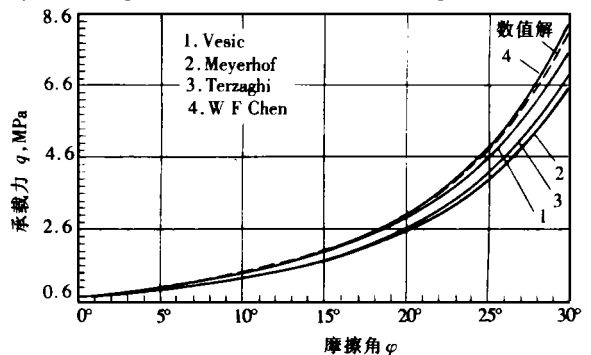


图 8 数值解和各种经验方法的对比

$$\left. \begin{aligned} d_c &= 1 + 0.4(D/B) \quad \varphi = 0^\circ \\ d_c &= d_q - \frac{1-d_q}{N \operatorname{ctg} \varphi} \text{ 的临} \varphi > 0^\circ \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$d_q = 1 + 2 \operatorname{tg} \varphi (1 - \sin \varphi)^2 (D/B) \quad (25)$$

$$d_\gamma = 1.0 \quad (26)$$

表4比较了数值解和经验公式的计算结果。在本例中,不采用修正,与数值解的差别为10%左右;采用修正后,这个差别减少为5%左右。

表4 有埋深情况数值解和考虑了 Vesic 修正的计算成果对比

φ (°)	数值解		经验方法			
			不考虑修正		考虑修正	
	q_n	η_n	q_v	η_v	q_h	η_h
0	884.39	0.0	800.8	0.104	860.0	0.028
5	1220.84	0.0	1093.2	0.117	1171.3	0.042
10	1694.92	0.0	1525.6	0.111	1630.0	0.040
15	2444.73	0.0	2196.5	0.113	2335.1	0.047
20	3670.4	0.0	3291.8	0.115	3475.5	0.056
25	5798.64	0.0	5182.0	0.119	5425.8	0.069
30	9763.81	0.0	8655.9	0.128	8983.2	0.087

注:下标 n, v 和 h 分别代表数值解、经验解不考虑修正、考虑修正的相应数值; q 的单位为 kN/m。

对于偏心距为 e 的荷载情况,一般采用有效宽度 $B - 2e$ 来代替原基础有效宽度 B 。表5比较了本例在 $e = 0$ 到 $e = 1.7\text{m}$ 不同情况下,按此经验方法求得的地基承载力值与数值计算的结果。成果说明,随着偏心距的增加,这一等效宽度的处理方法包含的误差增大,但属偏于安全的。

表5 具有偏心荷载的计算成果对比

$e(\text{m})$	e/B	$T(\text{kN})$	$T_e(\text{kN})$	η
0.0	0.0	23901.8	23901.8	0.000
0.425	0.025	23758.3	22419.5	0.056
0.85	0.05	23537.3	21236.3	0.097
1.70	0.10	22524.9	18622.5	0.173

注: T 和 T_e 分别为数值解和经验解的总承载力,单位 kN;

$$\eta = (T - T_e) / T.$$

5 讨论和结论

由以上分析结果可知,建立在塑性力学上限解基础上的地基承载力的数值解法突破了目前计算地基极限承载力问题的框架,避免了根据经验公式而引起的各种局限性。在给定了边界条件后,即可直接用数值分析方法进行求解,其结果与理论解非常接近。由于数值解可用于具有任意基础形状和地下水、地层分区的情况,其应用范围十分广泛。

在建立本方法的理论框架时,曾经假定材料遵守相关联的流动法则,由此导出计算内能耗散的式(3)。事实上,本文提出的方法对于任何服从莫尔-库仑强度准则的材料都是适用的。当将滑动土体离散成一系列倾斜条块,并假定土条侧面间也达极限平衡状态后,这个问题已经变成静定。无论材料是否遵守相关联的流动法则,解答是唯一的。既然本法获得了关于加载系数的解答,就应是那个唯一的解答。本文第一作者曾经从静力平衡出发(即传统的 Sarma 法),经过长篇的推导,最终也获得了式(12)^[12]。这说明,能量法和相关联流动法则,只是为克

服静力平衡方程数学求解困难提供了一个极为简便的途径, 并没有损害承载力问题要求的材料强度的普遍特性。

参 考 文 献

- 1 B. B. 索科洛夫斯基. 松散介质静力学. 徐志英译. 北京: 地质出版社, 1956. 97 ~ 110.
- 2 Chen W F. Limit Analysis and Soil Plasticity. Elsevier Scientific Publishing Co. New York, 1975.
- 3 栾茂田等. 土体稳定分析的改进滑楔模型及其应用. 岩土工程学报, 1995, 17(4): 1 ~ 9.
- 4 Donald I B, Chen Z Y. Upper Bound Solutions in Geomechanics. Computational Plasticity, Fundamentals and Applications. In: Proc 4th Int Conf Comp Plas. Barcelona, Spain, 1995. 1797 ~ 1808.
- 5 陈祖煜. 边坡稳定的塑性力学上解. 见: 中国土木工程学会第七届土力学及基础工程学术会议论文集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1994. 484 ~ 488.
- 6 Chen Z, Shao C. Evaluation of Minimum Factor of Safety in Slope Stability Analysis. Canadian Geotechnical Journal, 1988, 25: 735 ~ 748.
- 7 Chen, Donald. 边坡稳定分析的塑性力学上解. 见: 基本原理和方法(第一部分). 北京: 水利水电科学研究院, 1994.
- 8 Chen Zuyu. Random Trials Used in Determining Global Minimum Factors of Safety of Slopes. Canadian Geotechnical Journal 1992, 29(2): 225 ~ 233.
- 9 Terzaghi K. Theoretical Soil Mechanics. New York: John Wiley and Sons, 1944. 118 ~ 143.
- 10 Meyerhof G G. The Ultimate Bearing Capacity of Foundations. Geotechnique, 1951, II, 301 ~ 331.
- 11 Vesic A S. Bearing Capacity of Shallow Foundations Foundation Engineering Handbook. Edited By Hans F Witerkorn, Hsai-Yang Fang, 1975. 121 ~ 147.
- 12 陈祖煜, Donald. 边坡稳定分析的塑性力学上解. 见: 论能量法和静力法的等效性(第二部分). 北京: 水利水电科学研究院, 1994.

Numerical Analysis of Foundation Bearing Capacity

Chen Zuyu

(Department of Geotechnical Engineering, China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing, 100044)

Gao Feng

(Design Institute of Changjiang Water Resources Commission, Wuhan, 430010)

Abstract This paper discusses the extensions of the energy method of slope stability to bearing capacity analysis. The basic principles developed by Donald and Chen (1995) have been reviewed, which showed that the new method can give answers as accurate as closed-form solutions. The results given by this numerical approach were compared with those obtained by the conventional methods. It has been found that the bearing capacities calculated by empirical methods with non-zero foundation soil gravity in most cases have been underestimated. The traditional empirical methods for embedded footings and eccentric loadings also underestimate the ultimate load by 5%—10%, compared with those given by the numerical method.

Key words bearing capacity of foundations, upper bound theorem of plasticity, the method of optimization.