

# 最优化方法在确定边坡最小安全系数方面的应用

陈祖煜 邵长明

(水利水电科学研究院, 北京)

## 提 要

本文探索最优化方法用于寻找边坡稳定分析中最小安全系数的可能性。在常规的边坡稳定分析中, 需要多次试算许多滑裂面, 比较相应的安全系数, 其成果不仅粗糙, 而且有可能不是事实上的最小值。采用最优化方法, 可以用严格的数值分析方法找到最小安全系数及其相应的“临界滑裂面”。本文采用单形法, 负梯度法和DFP法。通过对一系列算例的分析验证, 可以发现, 最优化方法和理论解以及穷举法的计算成果吻合。本文还列举了工程实例的分析结果以说明其在工程设计中的实用性。采用最优化方法, 可以使设计工作大大简化, 成果更为可靠。

## 一、前 言

在岩石和土质边坡稳定分析中, 建立在极限平衡原理基础上的“条分法”仍然是工程实践中的应用最为广泛的一种方法。采用这个方法, 需要分两步进行计算。

第一步, 对某一可能的滑裂面, 分析其抗滑稳定安全系数。在这方面, 研究工作已相当深入。目前已发展成对滑裂面形状和静力平衡条件均不作简化假定的严格方法<sup>[1-3]</sup>。

第二步, 对许多可能的滑裂面, 确定相应最小安全系数的临界滑裂面。显然, 从数学角度, 这是一个确定安全系数这个泛函相对于滑裂面形状这个自变函数的极小值问题。曾经有一些学者用变分原理来求解这个问题。但由于实际问题往往包含极其复杂的土层和地下水情况, 解析方法的应用范围十分有限。从实用角度, 需要用最优化原理发展一种数值计算方法, 使设计者能容易地找到最小安全系数, 并不漏掉可能的最小值。常用的“穷举法”实际上也是一种最优化方法。但这种方法通常只在圆弧形滑裂面情况中应用。对于自由度较多的任意形状滑裂面, 显然不是一种有效的方法。阎中华曾用“黄金分割法”<sup>[4]</sup>, 周文通曾用“鲍威尔法”<sup>[5]</sup>探讨过圆弧形和圆弧-直线型(改良圆弧法)的最小安全系数, 获得满意的结果, 但研究范围仍未进入任意形状滑裂面领域。孙君实使用复形法计算具有多个自由度的折线形滑裂面的最小抗滑稳定安全系数, 使这方面的研究工作大大推进了一步<sup>[6,7]</sup>。

目前, 工程实践中仍很少使用最优化方法来确定边坡临界滑裂面, 有关这个方法的可行性、实用性方面的研究也不很充分。因此, 笔者拟在前述已经获得的研究成果基础上, 进一步通过算例分析论证最优化方法应用于稳定分析的有关问题, 以期这个方法能在实践中获得更加广泛的应用。

## 二、边坡稳定分析的最优化方法

### (一) 目标函数的确定

对于某一边坡，如有一滑裂面曲线 $y(x)$ ，可以计算相应的安全系数 $F$ 。我们的目的是寻找使安全系数 $F$ 取得极小值的滑裂面曲线。因此，目标函数为

$$F = F(y(x)) \tag{1}$$

确定任意形状滑裂面的安全系数，可以有很多方法。美国陆军工程师团法<sup>[1]</sup>为仅满足力的平衡的简化方法。笔者的经验表明，这个方法用在滑裂面形状比较平顺的问题时，所得的 $F$ 值与严格方法很接近；但当滑裂面出现较多的转折点时，则计算结果误差较大。图1所示一沿软弱夹层的滑裂面，假设两个端点 $A, D$ 固定， $B, C$ 沿夹层移动，其相应坐标分别为 $x_1, x_2$ 。对一组 $x_1, x_2$ 值，可得安全系数 $F$ ，绘得安全系数的等值线。陆军工程师团法的结果在图2(a)表示，摩根斯顿-普赖斯法的结果在图2(b)表示。可见两种方法所得安全系数相差10—15%。最小安全系数前者为1.184，后者为1.026。值得注意的是用陆军工程师团法得到的安全系数偏大，因而有可能高估了它的抗滑能力。在工程设计中是不安全的。

区	内摩擦角 $\phi$ (°)	凝聚力 $c$ (kPa)	饱和容重 $\gamma_s$ (kN/m <sup>3</sup> )	天然容重 $\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )
1	35	9.8	20	19
2	25	58.8	19	17
3	30	19.6	21.5	21
4	16	9.8	19.5	18.5

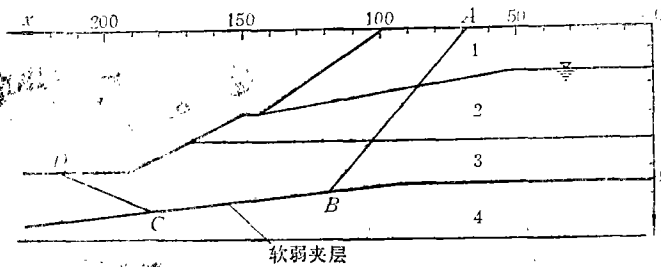


图1 不同方法计算安全系数成果比较例题 单位: m

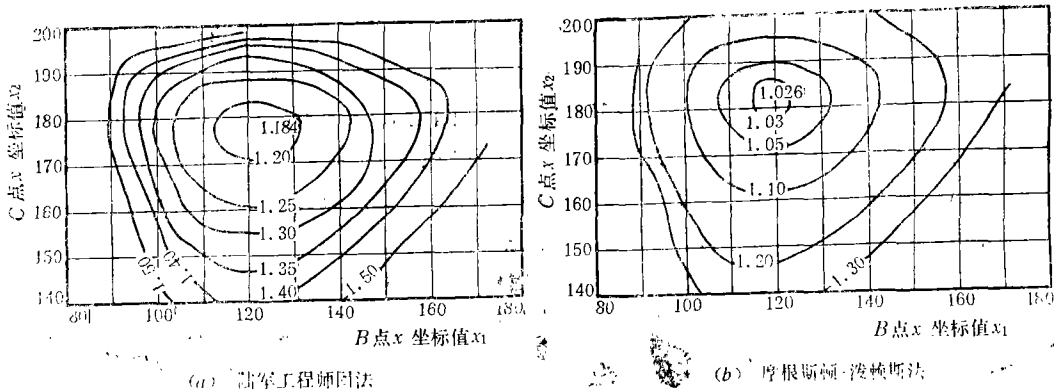


图2 安全系数等值线图(图1例题) 单位: m

根据本课题的实际情况,我们采用陈祖煜和摩根斯顿改进的摩根斯顿-普赖斯法<sup>[2,3]</sup>,作为计算目标函数的手段。其主要优点是:

1.该法适用于任意形状滑裂面,满足全部静力平衡要求。对于土条侧向力的假定满足了滑坡体端部剪应力成对原理,在方法上比较严格。采用此法有条件用具有塑性力学闭合解的算例进行验证,以衡量最优化方法的正确性。附录中文献[9]介绍的具有塑性力学理论解的算例,用摩根斯顿-普赖斯法核算安全系数为1.0004。此例将在下面最优化方法的研究中使用。

2.该法经改进后,具有稳定的数值分析收敛性,安全系数 $F$ 的迭代精度可达 $10^{-5}$ (参见附录所列例题)。最优化方法要成百次地计算目标函数及其对自变量的导数。极值附近导数接近于零。因而要求目标函数具有较多的有效位数才能将导数算准确。一个数值分析收敛性能好,精度高的计算目标函数的方法对保证最优化计算程序顺利进行,具有十分重要的意义。

## (二) 滑裂面形状确定

最优化方法要求确定目标函数的自变量为 $n$ 维向量。我们需要将滑裂面曲线离散化。设曲线上 $m$ 个点 $A_1, A_2, \dots, A_m$ (图3)。将此 $m$ 个点用直线或光滑曲线联起来,以近似模拟此曲线。一旦这种联接模式确定,安全系数 $F$ 即可表达成此 $m$ 个点的坐标 $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m$ 的函数

在进行最优化方法搜索时, $A_1, A_2, \dots, A_m$ 将移到新的位置 $B_1', B_2, \dots, B_{m-1}, B_m'$ (图3),其中端点 $A_1, A_m$ 原来在边坡线上,有可能移到边坡线外或内,如图3中的 $B_1', B_m'$ 。为此,我们约定将 $B_1'$ 和 $B_2, B_{m-1}$ 和 $B_m'$ 用直线相联,分别找到他们和边坡线的交点 $B_1$ 和 $B_m$ ,仍以 $B_1, B_2, \dots, B_m$ 作为研究对象。当然,一开始初始滑裂面端点就可以不在边坡线上,可按同样的原则找到其和边坡线的交点。

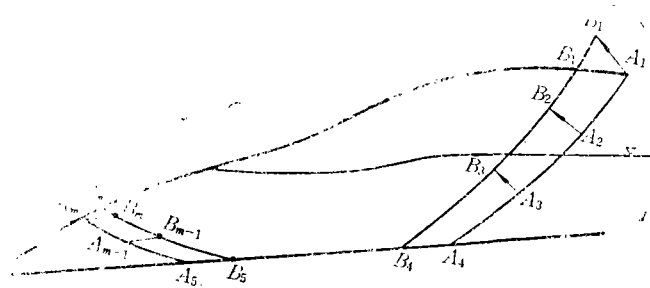


图3 滑裂面及其控制点

在进行岩石边坡的稳定分析时,通常用直线将 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 联结,此时滑裂面呈折线形。对均匀的土质边坡,通常希望滑裂面为较平顺光滑的曲线,此时,采用三次或更高次的样条函数联结这些点。当然,也可以用直线和光滑曲线的组合构筑滑裂面,如图3所示。

用样条函数构筑通过 $m$ 个点的光滑曲线,有时形状会有很大起伏。如图4所示曲线为一个使用二次样条的例子。尽管此五个点离差并不大,但形成的曲线如实线所示起伏甚大,计算可能因此中断。为避免这种情况,笔者建议设计高次的样条函数。图4虚线为三次样条的结果,显然平顺得多。另一方面,可采用一些技巧。例如,先用折线模式进行最优化分析,获得相应最小安全系数和临界滑裂面,再以此临界滑裂面作为初始变量,用光滑曲线模式再进行一次最优化搜索,由于此时滑裂面曲线仅在小范围内移动,一般不至产生起伏较大的形

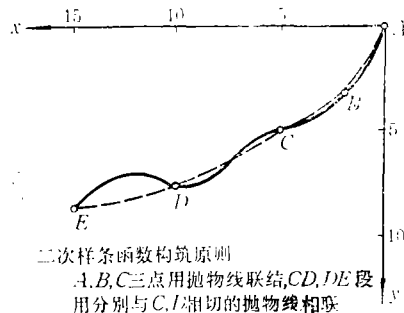


图4 用样条函数构筑联结A, B, C, D, E五点的光滑曲线

状。曲线拟合的模式一经确定就应在优化分析的全过程中一贯地使用。

### (三)最优化方法

设确定目标函数 $F$ 的 $m$ 个滑裂面控制点的 $2m$ 个坐标值 $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m$ 中有 $n$ 个是独立的,其余 $2m-n$ 个变量因下面两个原因,不在自变量中出现。

①某些情况,已明确滑裂面的两个端点固定,则相应的 $x, y$ 坐标值不出现在自变量中。

②当边坡中存在软弱结构面时,该面上的点只能沿此面移动。此时,该点的坐标值 $x, y$ 中只有一个是独立的,另一个可以通过该结构面的倾角确定。

我们用 $Z = (z_1 z_2 \dots z_n)^T$ 代表 $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m$ 中 $n$ 个独立的变量,安全系数即可表达为

$$F = F(Z) \quad (2)$$

最优化方法的目的是在给定的初始向量 $Z^0$ 附近寻找使 $F$ 获得极小值 $F_m$ 的向量 $Z = Z^0 + \Delta Z$

本文采用的最优化方法为单纯形法,负梯度法和DFP法,有关这几种方法的原理可在许多专著<sup>[10, 11]</sup>中找到。这里,仅结合边坡稳定分析的实际情况,简述这三种方法的具体计算步骤。

#### 1.单纯形法

对某一初始滑裂面向量 $Z^{0T} = [Z_1^0, Z_2^0, \dots, Z_n^0]$ ,在其邻近构筑 $n$ 个滑裂面向量

$$\begin{aligned} Z_1^T &= [z_1^0 + p, z_2^0 + q, \dots, z_n^0 + q] \\ Z_2^T &= [z_1^0 + q, z_2^0 + p, \dots, z_n^0 + q] \\ Z_n^T &= [z_1^0 + q, z_2^0 + q, \dots, z_n^0 + p] \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$p = \frac{\sqrt{(n+1)} + n - 1}{n\sqrt{2}} a \quad (4)$$

$$q = \frac{\sqrt{(n+1)} - 1}{n\sqrt{2}} a \quad (5)$$

$a$ 为单纯形的边长,它大致规定了搜索的规模和范围。

确定初始单形后,采用反射,延伸,收缩等步骤,逐步获得较小的安全系数,直至满足收敛要求的精度,即新得的安全系数与当时单形的 $n+1$ 个顶点相应的安全系数的均方差小于指定值 $\varepsilon$ 。笔者选用了 $\varepsilon = 10^{-6}$ 。

## 2. 负梯度法

在某一迭代步 $\nu$ ,滑裂面向量为 $\mathbf{Z}^\nu$ ,令 $\mathbf{Z}^\nu$ 在某一方向 $\mathbf{S}^\nu$ 线性地获得增量成为 $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^\nu + a\mathbf{S}^\nu$ ,其中 $a$ 为一系数。此迭代步以 $\mathbf{Z}$ 在 $\mathbf{S}^\nu$ 方向获得极小值而终止,即 $\mathbf{Z}^{\nu+1}$ 由下式确定

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} [F(\mathbf{Z}^\nu + a\mathbf{S}^\nu)] = 0 \quad (6)$$

负梯度法以安全系数 $F$ 对自变量向量 $\mathbf{Z}$ 的梯度向量 $\mathbf{G}$ 的负值作为搜索方向,即

$$\mathbf{S}^{\nu T} = -\mathbf{G}^T = -\left(\frac{\partial F}{\partial z_1}, \frac{\partial F}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n}\right) \quad (7)$$

迭代从某一初始向量 $\mathbf{Z}^0$ 开始,每一迭代步均以获得沿搜索方向的极小值而终止。当 $|F(\mathbf{Z}^{\nu+1}) - F(\mathbf{Z}^\nu)|$ 小于规定的允许值 $\varepsilon$ 时,即认为收敛, $\mathbf{Z}^{\nu+1}$ 为最优解,相应的 $F$ 值即为极小值。在分析中,我们选用 $\varepsilon = 1.5 \times 10^{-6}$

## 3. DFP法

此法由戴维顿(Davidon)提出,并经弗莱彻(Fletcher)和鲍威尔(Powell)改进。计算步骤和负梯度法相同,只是某一迭代步的搜索方向 $\mathbf{S}^\nu$ 由下式决定

$$\mathbf{S}^\nu = -\mathbf{A}^\nu \mathbf{G}^\nu \quad (8)$$

第 $\nu+1$ 步 $\mathbf{A}^{\nu+1}$ 由下式决定

$$\mathbf{A}^{\nu+1} = \mathbf{A}^\nu + \frac{\Delta \mathbf{Z}_\nu \Delta \mathbf{Z}_\nu^T}{\Delta \mathbf{Z}_\nu^T \Delta \mathbf{Z}_\nu} - \frac{\mathbf{A}^\nu \mathbf{Y}_\nu (\mathbf{A}^\nu \mathbf{Y}_\nu)^T}{\mathbf{Y}_\nu^T \mathbf{A}^\nu \mathbf{Y}_\nu} \quad (9)$$

$$\mathbf{Y}_\nu = \mathbf{G}^{\nu+1} - \mathbf{G}^\nu \quad (10)$$

计算从初始向量 $\mathbf{Z}^0$ 开始,先取 $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ ,即 $\mathbf{A}^0$ 为单位向量,由式(8)得搜索方向 $\mathbf{S}^0 = -\mathbf{G}^0$ 事实上,第一步是用负梯度法进行一次一维搜索,以后每一步的 $\mathbf{A}^{\nu+1}$ 均由式(9)确定。

负梯度法和DFP法均需用数值计算方法确定 $F$ 对自变量向量 $\mathbf{Z}$ 各分量的导数,即确定式(7)。当接近极值点时这些导数值接近零,故计算这些数值的误差受安全系数本身的精度,计算机的截断误差和舍入误差影响,笔者在应用摩根斯顿-普赖斯法计算安全系数时,要求精度达到小数点后第五位。计算通常用单精度,有效位数为7位。同时应用了斯图尔特(Stewart)提出的变尺度法计算导数的方法<sup>[12]</sup>。

### 三、用最优化法确定临界滑裂面的可行性和实用性

为了探讨用最优化方法在边坡稳定分析中确定具有最小安全系数的临界滑裂面的可行性及其在工程中的实用性,笔者在原计算一个滑裂面安全系数的程序«STAB»基础上扩充编制了具有单纯形法、负梯度法和DFP法的计算程序,并设计了几个算例,从以下几个方面进行论证。

1. 附录所示具有理论解的算例,验证最优化方法能否获得与理论解相同的结论。

在附录中已论述,对此算例,理论解的结论是,临界滑裂面为附图(a)中曲线 $ABCD$ 。用摩根斯顿-普赖斯法,用附图(b)所示侧向力的假定,所得安全系数为1.0004。现假设一初始滑裂面由1,2,3,4,5五点用折线相连,如图5所示,用单纯形法,规定两端点固定不动,其他点沿垂直方向移动,计算获得很好的收敛解答,所得最小安全系数为1.0045,相应临界滑裂面由1',2',3',4',5'五点用折线相连,与理论解确定的滑裂面几乎重合。注意,此理论初始滑裂面和理论点相差甚远,且形状甚不规则,但收敛情况很好。

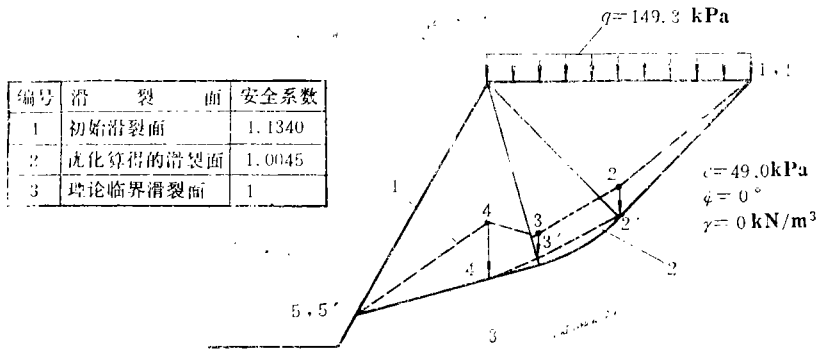


图5 具有塑性力学理论解答的例题(用单纯形法)

现改用DFP法,除两端点仍规定固定不动外,其他点均不规定移动方向,即每点均有 $x$ 和 $y$ 坐标两个自由度。3,4,5之间用抛物线相连,其余用直线相连,如图6所示,最后得收敛解 $F = 0.9933$ ,2点至5点分别移至2'至5'点位置,构成的滑裂面亦几乎与理论解重合。同时,也曾作过两端均不固定,一个端点固定,另一端点不固定的情况,均得到接近1的最小安全系数以及与理论解吻合的临界滑裂面曲线。不一一赘述。

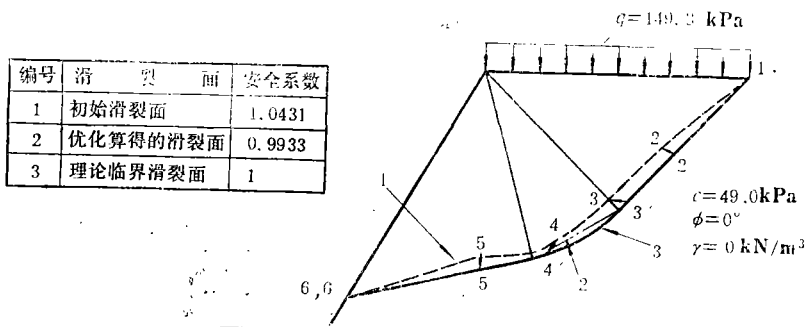


图6 具有塑性力学理论解答的例题(用DFP法)

### 2. 用穷举法验证最优化方法的计算结果

图7示一形状十分简单的滑裂面 $ABC$ ， $BC$ 是水平软弱夹层的一部分。假定 $A$ 点和 $B$ 点均沿水平方向移动，则此问题只有 $A$ 点的 $x$ 坐标 $x_1$ 和 $B$ 点的坐标 $x_2$ 两个自由度。可以用穷举法绘制安全系数 $F$ 对 $x_1$ 和 $x_2$ 的等值线，见图8和图9。所得最小安全系数为 $F_m = 1.2570$ ，相应 $x_1$ 和 $x_2$ 分别为93.00和143.00，相应滑裂面如图7中4所示。

首先，用负梯度法，采用初始滑裂面 $Z^0T = (x_1^0, x_2^0) = (84.00, 160.00)$ ，其形状如图7标有1的折线所示，用负梯度法迭代过程如图8中标有1的箭头所示。可以发现，迭代仅两步，即在 $Z^T = (92.08, 143.00)$ 处达到极小值， $F_m = 1.2570$ ，而且每一次迭代均大致沿着等值线的法线方向进行，在此方向的“山谷”处结束，这和负梯度法及其采用的一维搜索的基本概念是一致的。

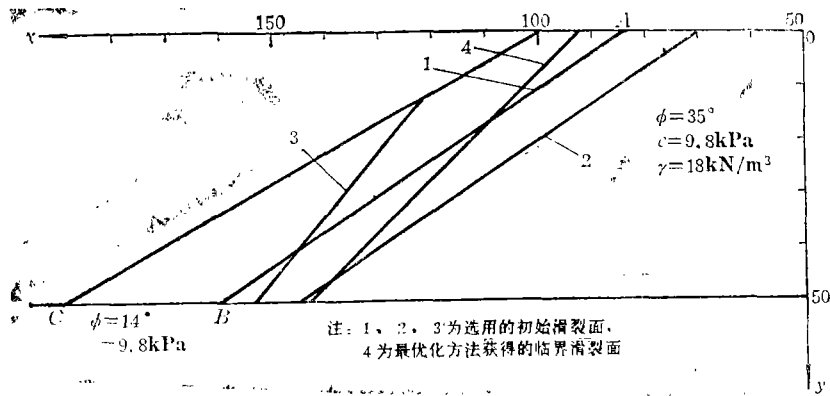


图7 用穷举法验证最优化方法结果例题 单位：m

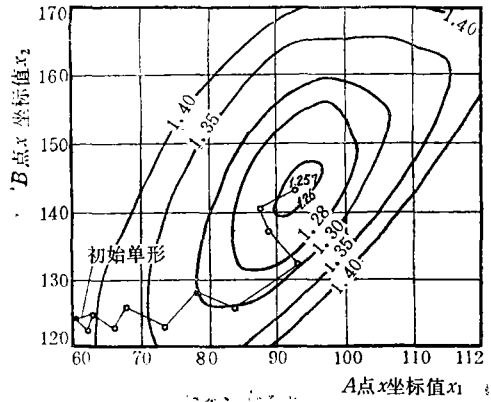
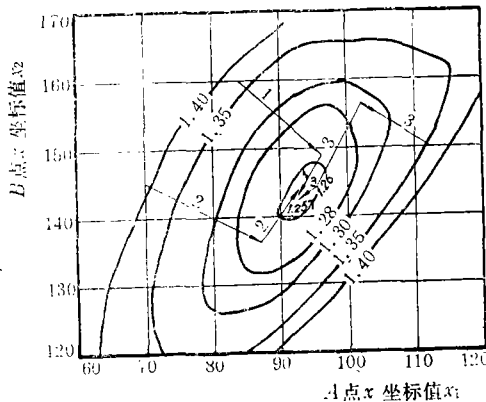


图8 负梯度法搜索路线(图7所示例题)单位:m 图9 单纯形法搜索路线(图7所示例题)单位:m

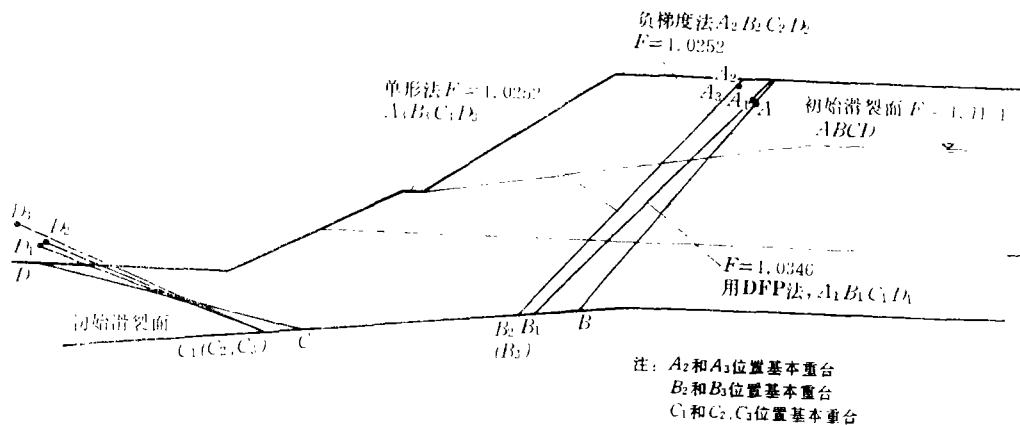
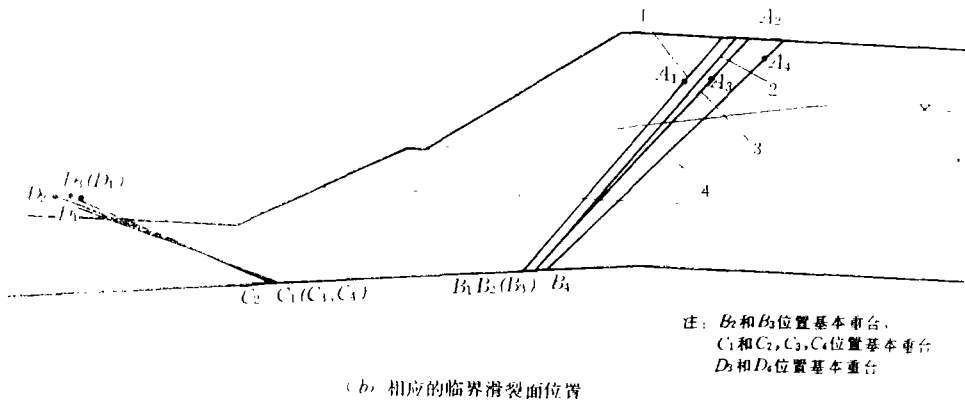
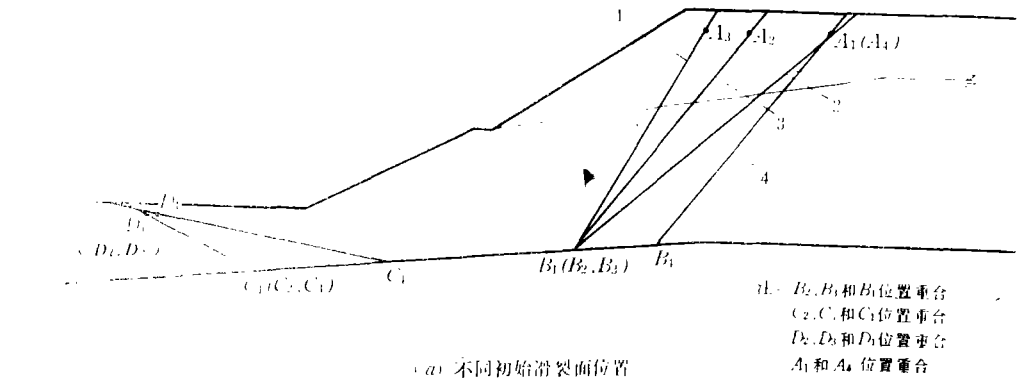
图9示单纯形法的计算过程，从 $Z^0T = (63.00, 125.00)$ 开始，构成初始单形的另两个向量为 $(60.55, 124.34)$ ， $(62.34, 122.55)$ 。位于图9中的三角形状处。搜索路线如图9所示，最终在 $Z^T = (93.37, 143.40)$ 处获得极小值 $F_m = 1.2569$ 。

此例十分形象地说明最优化方法搜索最小安全系数的可靠性和有效性。

3. 验证某一局部区域，采用不同的初始滑裂面曲线，能否得到相同的临界滑裂面曲线和相应的最小安全系数。

在某一局部区域，初始滑裂面是由计算者任意选定的，它不应影响最优化的计算成果。现通过下例验证。

对图7所示的算例，分别采用 $Z^{0T}$ 为(84.00, 160.00), (70.00, 145.00), (112.00, 150.00)



(c) 对同一初始滑裂面，不同最优化方法计算结果比较

图10 不同初始滑裂面计算结果比较例题  
土性指标同图(1)



三个不同的初始滑裂面,即图7中标有1,2,3的三个滑裂面,迭代过程如图8标有1,2,3的三个箭头所示。可见不同的初始滑裂面均可较好地收敛到基本相同的极值点上。临界滑裂面为图7中标有4的折线。

图10(a)示一自由度较多的算例。滑裂面 $ABCD$ 的两个端点 $A, D$ 没有设在边坡的外边界上,并可在 $x_1, y$ 两个方向移动,程序自动按直线延长原则找到其与边坡线交点, $C, B$ 则沿着设定的软弱层移动。在图10(a)中,用脚标1,2,3,4分别代表滑裂面 $ABCD$ 四个初始线,最优化计算所得的四个临界滑裂面并不重合,仍用脚标1,2,3,4在图10(b)中表示,相应的最小安全系数示于表1。可见,临界滑裂面的位置及相应安全系数相互也颇接近。滑裂面4的安全系数为1.0346,和前三个相差稍大,但总的来说,差别是不大的<sup>①</sup>。

表1 不同初始滑裂面用DFP法计算最小安全系数(图10(a)所示例)

编号	初始滑裂面 (图10(a))	安全系数	临界滑裂面 (图10(b))	最小安全系数
1	$A_1 B_1 C_1 D_1$	1.1914	$A_1 B_1 C_1 D_1$	1.0138
2	$A_2 B_2 C_2 D_2$	1.1207	$A_2 B_2 C_2 D_2$	1.0111
3	$A_3 B_3 C_3 D_3$	1.1200	$A_3 B_3 C_3 D_3$	1.0115
4	$A_4 B_4 C_4 D_4$	1.1171	$A_4 B_4 C_4 D_4$	1.0346

4. 验证对同一初始滑裂面,采用不同的方法,能否获得相同的结果。

对图10所示例题,均用图10(a)中滑裂面4作为初始滑裂面,用DFP法,负梯度法和单纯形法进行计算,所得临界滑裂面分别由图10(c)中带脚标的1,2,3的折线所示。可见,负梯度法和单纯形法计算所得的临界滑裂面几乎重合,相应的安全系数为1.0252,DFP法的结果稍大,为1.0346<sup>①</sup>。

以上几个实例初步论证了最优化法作为确定边坡稳定分析中搜索临界滑裂面及相应最小安全系数的可行性。

## 四、工程实例分析

为考核最优化方法在工程中的实用性,现选用天生桥二级水电站首部枢纽进水口右岸滑坡实例进行分析。

滑坡发生于1985年10月24日,总方量为7000余 $m^3$ 。滑坡区位于天生桥峡谷和坝索峡谷之间河湾的凹岸,系第四系冲坡积物和施工时人工堆碴。其物理力学参数如表2所示。

表2 各土层物理力学性能指标

土层	密度 ( $g/cm^3$ )	抗剪强度指标	
		内摩擦角	凝聚力(kPa)
施工弃碴	1.85	21.8°	19.6
旧堆碴	1.85	21.8°	19.6
坡积土	1.85	21.8°	0.0
砂土	1.85	20.8°	29.4
砂质淤泥	1.85	20.8°	34.3
河卵石,砾石	1.90	24.2°	0.0
河沙			

① 本文发表时,作者已改进了DFP法,使此问题得到解决,拟另文介绍——笔者。

需要指出的是，影响滑坡分析的主要参数，即各土层的内摩擦角和凝聚力，系根据工程地质的宏观分析及简单的试验由经验确定，因此，分析结果可能包含一定误差。

滑坡发生前，靠近坡脚的砂质淤泥层因修建挡土墙被开挖而削弱了边坡的整体稳定性。在初次用最优化方法进行计算时，滑裂面的下端点B(图11)始终沿边坡线BC的方向往下不断获得更小的安全系数。因此，在计算时，我们规定滑裂面下端点B位于坡趾固定不动。

根据滑坡实地勘测得到的滑裂面形状在图11中示。此滑裂面的安全系数为0.9009，并可见滑裂面顶部是一张拉裂缝。根据土力学理论<sup>[13]</sup>，拉力缝的高度为

$$Z_0 = \frac{2c}{\gamma} \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\phi}{2}) = \frac{2 \times 2.0}{1.8} \operatorname{tg}55.9^\circ = 3.22\text{m}$$

因此，对滑裂面的顶点，我们规定只允许有一个自由度，即沿着y坐标为3.2m的水平方向移动。

第一次计算，我们选用八个点，构成初始滑裂面，如图11中表示，相应安全系数为1.0061，各点移动方向除第7点为垂直方向外，自2点至6点与x轴夹角均为45°方向。故此题有七个自由度。两点之间用直线相连。用负梯度法进行计算，经24次一维搜索，获得临界滑裂面示于图11。相应安全系数为0.8021。此题在M160机上运算，CPU时间为5分44秒，耗时较多。

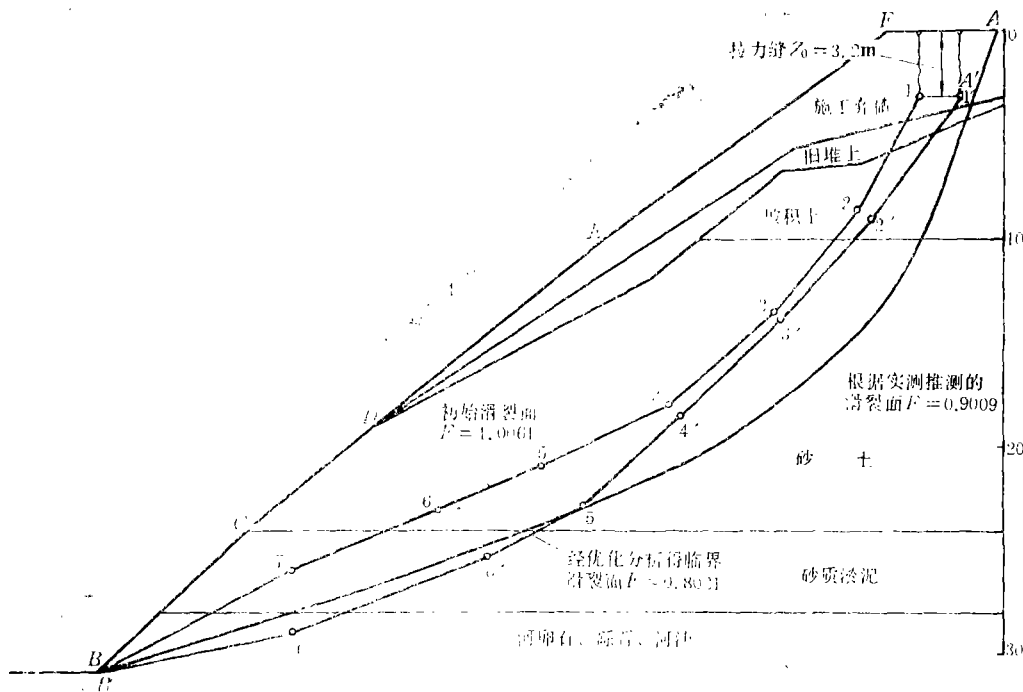


图11 天生桥滑坡，负梯度法，各点一个自由度 单位：m

图12采用较少的点，共6点，同样，上端部1点限制水平方向移动，下端部B点固定不动，故有五个自由度，其他点沿垂直方向移动，此题采用样条函数用光滑的曲线连接此六个滑裂面控制点。初始滑裂面相应安全系数为F=1.0298。用负梯度法经七次一维搜索得临界滑裂面示于图12。相应安全系数为0.8123。CPU时间为1分40秒。可见采用较少的点，所耗时时可大幅度减少，用样条函数，用较少的机时同样可算得误差不大的结果。

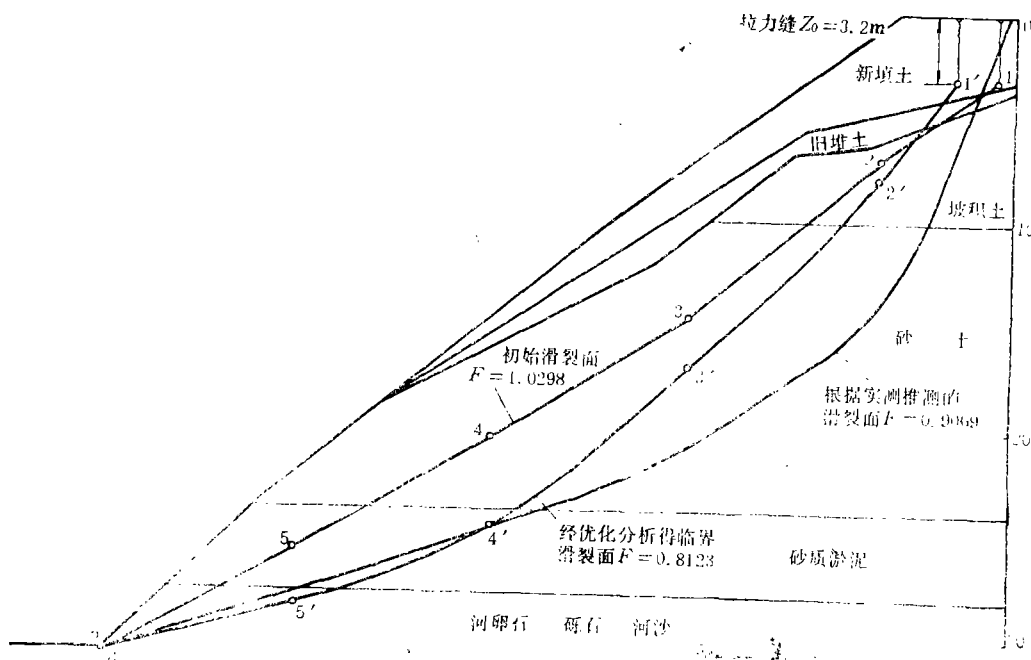


图12 天生桥滑坡，负梯度法，用样条函数 单位：m

### 五、 结语

从本文列举的各算例看，用最优化方法确定边坡稳定最小安全系数，在理论上和方法上是成立的，可在工程实践中推广，在使用过程中不断改进其收敛性能，并进一步探讨多极值的分布规律以及工程中各种复杂的情况引起的问题的处理方法。

### 附录 具有塑性力学闭合解的算例

附图(a)示一无重量无内摩擦角的边坡，边坡与水平线倾角  $2\gamma = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ，坡顶承受垂直分布荷重，土的凝聚力 $c$ 值为49.0kPa，根据塑性力学原理，刚塑性理论解<sup>[9]</sup>得出的极限荷载为

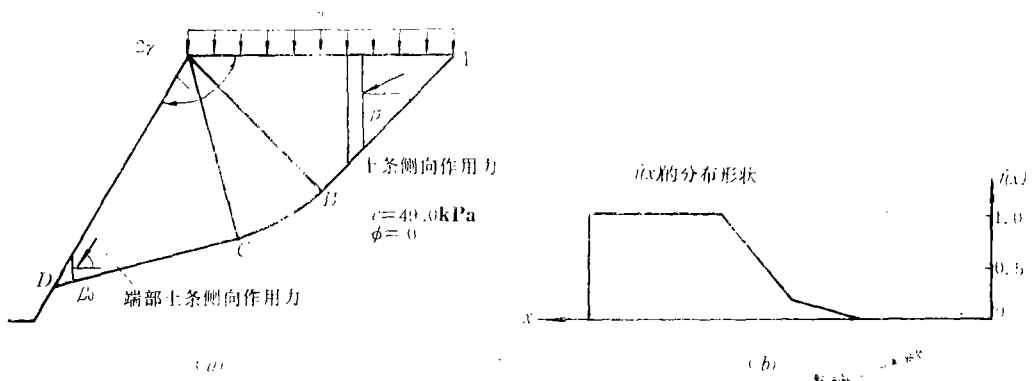
$$\begin{aligned}
 q &= 2c \left( 1 + 2\gamma - \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= 2 \times 49.0 \times \left( 1 + \frac{\pi}{6} \right) = 149.18 \text{ kPa}
 \end{aligned}$$

按塑性力学理论，滑移线由与边坡线夹角 $45^\circ$ 的直线 $AB, CD$ 和圆弧 $BC$ 组成。从极限平衡原理看，在条分法中，土条侧向作用力与水平线的倾角 $\beta$ 分布函数 $f(x)$ 大致如图(b)所示。

$\beta$ 由下式决定

$$\text{tg}\beta = \lambda f(x) \tag{附-1}$$

端点 $D$ 处最后一个土条的 $\beta$ 值按剪应力成对的要求应为 $\beta_0 = \pi/3 = 1.047$ ，(参见文献[2]。)



附图 具有塑性力学闭合解的个例一题  
(a)计算简图; (b)和理论解接近的  $f(x)$

现在,我们假定土坡的垂直荷重  $q$  为  $149.18 \text{ kPa}$ , 对理论解给出的滑裂面  $ABCD$ , 探讨能否用条分法获得 1 的安全系数, 同时端部  $D$  处得到  $\beta$  的值是否与理论值  $\pi/3 = 1.047 = 60^\circ$  吻合。

对  $f(x)$  的假定采用两种形状:

- (1) 和理论解接近的形式, 如附图(b)所示;
- (2) 按常规的作法, 令  $f(x) = 1$

计算结果如下表所示。

附表 1

情况	$f(x)$ 形状假定	$F$	$\lambda$	$\beta_0$ 值
1	按图(b)所示 (与理论解接近)	1.0004	1.6016	$58^\circ$
2	$f(x) = 1$	1.0582	0.5257	

计算结果表明, 情况 1, 即采用与理论解接近的  $f(x)$  假定获得的  $F$  和  $\beta_0$  分别为 1.0004 和  $58^\circ$ , 分别和理论值 1 和  $60^\circ$  十分接近。

在用迭代法求解  $F$  和  $\lambda$  时, 要求满足收敛要求的精度分别为  $10^{-5}$  和  $10^{-3}$ 。即相邻两次迭代  $F$  的差值小于  $10^{-5}$  时, 该值即为收敛解。情况 1 的迭代过程见附表 2。

附表 2

迭代次	$F$	$\lambda$
1	1.01747	1.2908
2	1.00296	1.60283
3	1.00036	1.60157
4	1.00038	1.60157
5	1.00038	1.60157

此例说明, 经改进的摩根斯顿-普赖斯法数值计算稳定性很好, 安全系数的有效位数可达小数点后第五位。

## 参 考 文 献

- [1] Morgenstern, N. R. and Price, V., The Analysis of the Stability of General Slip Surface, *Geotechnique* 15, No.1, 1965, pp. 79-93.
- [2] Chen Zuyu and Morgenstern, N. R., Extensions to the Generalized Method of Slices for Stability Analysis, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 20, No.1, 1983, pp.104-119.
- [3] Janbu, N., Slope Stability Computations, *Embankment Dam Engineering*, John Wiley and Sons, New York, 1973, pp. 47-86.
- [4] 阎中华, 均质土坝与非均质土坝稳定安全系数极值分布规律及电算程序简介, *水利水电技术*, 1983年第7期。
- [5] 周文通, 最优化方法在土坝稳定分析中的应用, *土石坝工程* 1984年2月。
- [6] 孙君实, 条分法的数值分析, *岩土工程学报*, Vol.6, No.2, 1984年。
- [7] 孙君实, 条分法的提法及其数值计算的最优化方法, *水力发电学报*, 1983年, 第1期。
- [8] U. S. Army Corps of Engineers, *Stability of Slopes and Foundations, Engineering Manual*, Vicksburg, Miss, 1967.
- [9] 王仁, 黄文彬, 塑性力学引论, 北京大学出版社, 1982年, pp, 163-166.
- [10] 朱伯芳, 黎展眉, 张壁城, 结构优化设计原理与应用, 水利电力出版社, 1984年。
- [11] Walsh, G. R., *Methods of Optimization*, John Wiley & Sons, 1975.
- [12] Stewart III, G. W. A Modification of Davidon's Method to Accept Difference Approximations of Derivatives, *Journal of Association for Computing Machinery*, Vol.1, 1967, pp.72-83.
- [13] Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley and Sons, 1943.

## The Use of the Method of Optimization for Minimizing Safety Factors in Slope Stability Analysis

*Chen Zuyu      Shao Changming*

(Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power Research, Beijing)

### Abstract

This paper explores the feasibility of the use of the methods of optimization for minimizing the safety factors in slope stability analysis. The routine procedure of finding the minimum safety factor includes comparisons of a number of potential slip surfaces which are basically selected by experience and random search. Low efficiency and unreliability are problems commonly encountered in profession.

The methods of optimization allow a mathematically rigorous and reliable searching for minimum safety factor and its associated "critical slip surface". In this paper, the simplex, negative gradient and Davidon-Fletcher-Powell methods were employed. Test problems with a closed form solution and grid search solutions showed all the above mentioned methods were capable of providing accurate results. A case history analysis showed the feasibility of the methods. It is concluded that the methods of optimization provide powerful means for practitioners to facilitate their routine work in the calculation of the minimum safety factor.